LÓGICAS SUBESTRUTURAIS

Edição de 2022 do

Compêndio em Linha de Problemas de Filosofia Analítica

2018-2021 FCT Project PTDC/FER-FIL/28442/2017

Editado por
Ricardo Santos e Pedro Galvão

ISBN: 978-989-8553-22-5

Centro de Filosofia da Universidade de Lisboa
Alameda da Universidade, Campo Grande, 1600-214 Lisboa

DOI: https://doi.org/10.51427/cfi.2022.0005

Resumo
Neste artigo, fazemos um levantamento das lógicas subestruturais, uma sub-classe de lógicas caracterizadas pela ausência de alguma regras de inferência cuja formulação esquemática não menciona quaisquer constantes lógicas. Introduzimos as lógicas subestruturais recorrendo ao cálculo de sequentes de Gentzen e discutimos alguns membros notáveis desta família, nomeadamente, a lógica intuicionista e a lógica intuicionista dual, algumas lógicas relevantes, a lógica linear, assim como algumas lógicas 'mistas' relacionadas com FDE. Discutimos, de seguida, algumas questões filosóficas respeitantes à subestruturalidade, com destaque para as perspectivas prova-teoréticas acerca do significado das constantes lógicas e a noção de consequência lógica.

Palavras-chave
Lógicas subestruturais, cálculo de sequentes, constantes lógicas, intuicionismo lógico, lógicas mistas.

Abstract
This is a survey of substructural logics, which are sub-classical logics distinguished by the restriction or lack of some rules of inference the schematic formulation of which does not mention any logical constants. We introduce substructural logics using Gentzen's sequent calculi and discuss some notable members of this family, namely, intuitionistic and dual-intuitionistic logic, some relevant logics, linear logic as well as some `mixed' logics related to FDE. We then discuss some philosophical issues pertaining to substructurality, notably in relation to proof-theoretic accounts of the meaning of the logical constants and the notion of logical consequence.

Keywords
Substructural logics, sequent calculus, logical constants, intuitionistic logic, relevance, mixed logics.

Lógicas Subestruturais

DOI: https://doi.org/10.51427/cfi.2022.0005

O objectivo deste apontamento é familiarizar o leitor com as lógicas subestruturais e alguns dos problemas filosóficos que as envolvem. Recordaremos, brevemente, a genealogia das lógicas subestruturais no trabalho de Gentzen e, pelo caminho, apresentaremos os rudimentos do tipo de cálculo por nós escolhido para apresentar as lógicas subestruturais – o cálculo de sequentes. De seguida, ofereceremos uma perspectiva geral sobre algumas lógicas desta família, com vista a exemplificar a sua riqueza e diversidade. Por fim, focar-nos-emos na discussão de dois problemas filosóficos paradigmáticos acerca da própria subestruturalidade.

Inevitavelmente, esta não será uma abordagem abrangente. O artigo deixará de fora muito do que respeita a lógicas subestruturais específicas, às técnicas utilizadas para as investigar e a várias das suas subtilezas filosóficas. Na secção final do artigo, encontrar-se-á um guia rudimentar dos tópicos evitados, juntamente com leituras recomendadas.

Não se pressupõe, neste artigo, qualquer conhecimento prévio sobre lógicas subestruturais, ou sobre o cálculo de sequentes, embora uma familiaridade prévia com a lógica matemática beneficie o leitor. No mínimo, espera-se que o leitor esteja familiarizado com a notação convencional utilizada nesta área. Contudo, por motivos de rigor, anuncia-se previamente que p, q, r, …, com ou sem subscritos, representam frases atómicas; A, B, C, …, com ou sem subscritos, representam *colecções* finitas de fórmulas, a exacta natureza das quais é especificada de maneira *ad hoc*. Os símbolos serão utilizados para representar os seus próprios nomes, com a distinção uso/menção a ser determinada pelo contexto.

Ressalvas do autor à parte, ponhamos mãos à obra!

Publicado pela primeira vez em 2022

Traduzido por Diogo Fernandes

1 Preâmbulo: A genealogia das lógicas subestruturais

Num artigo revolucionário publicado em 1935, Gerhard Gentzen introduziu duas novas maneiras de formalizar a lógica – a dedução natural e o cálculo de sequentes – as quais veio a utilizar para formalizar tanto a lógica clássica como a lógica intuicionista. Este novo tipo de cálculo tornou a subestruturalidade particularmente evidente; com efeito, será a partir dele que iremos *caracterizar* as lógicas subestruturais.

Os sequentes de Gentzen são pares de sequências de fórmulas, finitas e possivelmente vazias, escritas $X : Y$. Por exemplo, cada uma das linhas abaixo constitui um sequente:

$$p : p$$
$$p \vee q : p, q$$
$$\emptyset : (p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$$
$$q, \neg q : \emptyset$$

O primeiro membro do par é o *antecedente*, o segundo o *sucedente*. Uma fórmula A:

- é demonstrada num cálculo de sequentes (= é um teorema da lógica apresentada por esse cálculo) se e somente se o sequente $\emptyset : A$ é nele derivável;
- é refutada se e somente se o sequente $A : \emptyset$ é nele derivável;
- uma fórmula B é uma consequência das fórmulas $A_1, \ldots, A_n$ se e somente se o sequente $A_1, \ldots, A_n : B$ é derivável no cálculo.

É habitual assinalar um antecedente (sucedente) vazio através de um mero espaço em branco e, como tal, é isso que iremos fazer, escrevendo $\emptyset : A$ ($A : \emptyset$) simplesmente como $: A$ ($A :$). O martelo ($\vdash$) expressa consequência (e teorema). Assim, $\vdash A$ significa A é demonstrado, $A \vdash$ significa A é refutado, $X \vdash A$ significa que A se segue (é uma consequência de) X. Presume-se que todos estes enunciados se encontram devidamente indexados (a uma lógica, um cálculo, etc.)

Uma derivação no cálculo de sequentes é uma árvore de sequentes. A raiz da árvore é o sequente derivado. Todos os nódulos da árvore

$$\frac{A,\, X : Y}{A \wedge_a B,\, X : Y}\,\wedge\mathrm{E1(a)} \qquad \frac{X : Y,\, A \qquad X : Y,\, B}{X : Y,\, A \wedge_a B}\,\wedge\mathrm{D(a)}$$

$$\frac{B,\, X : Y}{A \wedge_a B,\, X : Y}\,\wedge\mathrm{E2(a)} \qquad \frac{X : Y,\, A}{X : Y,\, A \vee_a B}\,\vee\mathrm{D1(a)}$$

$$\frac{A,\, X : Y \qquad B,\, X : Y}{A \vee_a B,\, X : Y}\,\vee\mathrm{E(a)} \qquad \frac{X : Y,\, B}{X : Y,\, A \vee_a B}\,\vee\mathrm{D2(a)}$$

$$\frac{X : Y,\, A \qquad B,\, W : Z}{A \rightarrow_m B,\, X,\, W : Y,\, Z}\,\rightarrow\mathrm{E(m)} \qquad \frac{A,\, X : Y,\, B}{X : Y,\, A \rightarrow_m B}\,\rightarrow\mathrm{D(m)}$$

$$\frac{X : Y,\, A}{\neg A\,,\, X : Y}\,\neg\mathrm{E} \qquad \frac{A,\, X : Y}{X : Y,\, \neg A}\,\neg\mathrm{D}$$

FIG. 1. Regras operacionais de *LK*

são produzidos através da aplicação das regras do cálculo. Estas regras pertencem a duas categorias.

As *regras operacionais* são aquelas cuja formulação esquemática menciona explicitamente um vocabulário lógico específico.

Por exemplo,

$$\frac{A,\, X : Y}{X : Y,\, \neg A}\,\neg\mathrm{D}$$

é a regra que *introduz* a negação *no sucedente*. Ela diz-nos que, a partir de qualquer sequente onde surge uma ocorrência de *A* no antecedente, pode-se produzir um sequente exactamente como esse, mas em que $\neg A$ ocorre no sucedente e ao antecedente falta uma ocorrência de A. A regra

$$\frac{X : Y,\, A \qquad B,\, W : Z}{A \rightarrow_m B,\, X,\, W : Y,\, Z}\,\rightarrow\mathrm{E(m)}$$

introduz uma condicional no *antecedente*. O que resta do antecedente, no sequente produzido, consiste na sequência *X* concatenada a *W*, enquanto o sucedente consiste em *Y* concatenado a *Z*.

No cálculo de sequentes de Gentzen, *cada* regra operacional consiste numa introdução no antecedente ou numa introdução no sucedente.

Observação 1 (Sobre a notação). Até, e incluindo, a maior parte de §2.2, as conectivas binárias apresentarão frequentemente os subscritos

$$\frac{}{A : A}\ \text{Id}$$

$$\frac{X : Y, A \qquad A, Z : W}{X, Z : Y, W}\ \text{Corte}$$

$$\frac{A, B, X : Y}{B, A, X : Y}\ \text{TE} \quad \frac{X : Y, A, B}{X : Y, B, A}\ \text{TD}$$

$$\frac{A, A, X : Y}{A, X : Y}\ \text{CE} \quad \frac{X : Y, A, A}{X : Y, A}\ \text{CD}$$

$$\frac{X : Y}{A, X : Y}\ \text{EE} \quad \frac{X : Y}{X : Y, \mathrm{A}}\ \text{ED}$$

FIG. 1. Regras operacionais de *LK*

a ou *m*. Estes subscritos têm um propósito evocativo, aludindo a certas diferenças na formulação das regras, a importância das quais se tornará evidente apenas a partir de §2.1. (Para o leitor entendido: a distinção a que se alude verifica-se entre as formulações aditivas e as formulações multiplicativas para as regras das conectivas.) É importante que o leitor não infira – meramente a partir da diferença de notação, pelo menos – que a conectiva $\#_a$ é diferente da conectiva $\#_b$. Estritamente falando, os subscritos não são necessários. A mesma informação é expressa pelos nomes das regras que governam o comportamento das conectivas. Por exemplo, $\rightarrow_m$ transmite a mesma informação que '(a conectiva governada por) →R(m), →L(m)'. Contudo, dado que nos exemplos de derivações aqui apresentadas deixamos ao leitor (como exercício) a tarefa de decorar as transições executadas com os nomes das regras aplicadas, eles são, ainda assim, úteis.

As *regras estruturais* são aquelas que produzem sequentes *independentemente* do vocabulário lógico. A sua formulação esquemática não menciona quaisquer peças específicas de vocabulário lógico. (De maneira mais elegante: uma regra estrutural encontra-se fechada sob substituição nas fórmulas). O cálculo de sequentes de Gentzen para a lógica clássica, *LK*, contém, e.g., regras para trocar a ordem das fórmulas no antecedente:

$$\frac{A, B, X : Y}{B, A, X : Y}\ \text{TE}$$

Uma regra de Troca similar aplica-se ao sucedente.

LK também contém regras para fazer colapsar duas ocorrências de uma fórmula numa ocorrência só, tanto no antecedente como no sucedente:

$$\frac{A, A, X : Y}{A, X : Y}\ \mathrm{CE} \quad \frac{X : Y, A, A}{X : Y, A}\ \mathrm{CD}$$

LK e a maioria dos outros cálculos de sequentes contêm também uma regra que permite assinalar e rotular as folhas de uma derivação e, dessa maneira, marcar o início de qualquer derivação, produzindo *ex nihilo* o sequente $A : A$, para cada fórmula A:

$$\frac{}{A : A}\ \mathrm{Id}$$

Tudo considerado, *LK* consiste nas regras apresentadas nas Figuras 1 e 2. Trata-se do nosso cálculo paradigmático (plenamente) estrutural.

Um dos contributos fundamentais de Gentzen foi mostrar que é possível obter lógicas diferentes, banindo ou restringindo as regras estruturais, sem se alterar (no seu geral) as regras operacionais. Este aspecto marca a origem das lógicas subestruturais: lógicas que, ao serem apresentadas através do cálculo de sequentes, são obtidas ao banir-se ou restringir-se a aplicação de qualquer uma das regras estruturais de *LK*, i.e., qualquer uma das regras da Figura 2. (Ver §3.3 para um auto-comentário crítico a esta 'definição', a qual, à primeira vista, faz com que a subestruturalidade aparente ser um traço superficial da mera apresentação de uma lógica.)

2 Algumas lógicas subestruturais

Dá-se o caso que muitas lógicas são subestruturais no sentido (fraco) em que podem ser apresentadas através do *cálculo subestrutural de Gentzen*. Nesta secção, discutiremos algumas delas. A discussão não será extensa nem abrangente. Pelo contrário, ela será apenas um *ameuse-gueule*, onde se misturam detalhes técnicos e pedacinhos de motivações e perplexidades filosóficas, combinados de maneira a ilustrar algumas delícias filosóficas relevantes – ao gosto do autor – sobre o domínio geral das lógicas subestruturais.

2.1 *Restrições à cardinalidade e regras: Lógica intuicionista e a sua dual*

Devemos a Gentzen o primeiro cálculo subestrutural conhecido e, *eo ipso*, a primeira vez que uma lógica foi reconhecida como subestrutural. Juntamente com *LK*, que formaliza a lógica clássica, Gentzen também introduziu o cálculo *LJ* para a lógica intuicionista. Uma diferença estrutural notória entre *LK* e *LJ* é que em *LJ* se pode aplicar Enfraquecimento no sucedente apenas se o sucedente da premissa--sequente for vazio:

$$\frac{X :}{X : A}\ \mathrm{ED}\,(\mathrm{I})$$

Outra diferença é que as regras TD e CD se encontram ausentes em *LJ*: as condições para a sua aplicação nunca se verificam.

Estes diferenças quanto às regras estruturais são 'efeitos' da condição de cardinalidade que afecta os sucedentes de *LJ*: estes apenas podem conter uma fórmula (não repetida). Assim, todas as regras de *LJ* são modificadas em conformidade com esta restrição. (Deixamos como exercício a apresentação das regras de *LJ*.)

Os intuicionistas são famosos por rejeitarem princípios de inferência classicamente válidos, tais como a eliminação da dupla negação ($\neg\neg A \vdash A$), o princípio do terceiro excluído ($\vdash A \vee_a \neg A$) ou a mais esotérica lei de Peirce ($\vdash ((A \rightarrow_m B) \rightarrow_m A) \rightarrow_m A$). Considere-se agora as seguintes derivações em *LK*:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A : A}}{: A, \neg A}}{\neg\neg A : A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A : A}}{A : A \vee_a \neg A}}{: A \vee_a \neg A\,,\, \neg A}}{: A \vee_a \neg A\,,\, A \vee_a \neg A}}{: A \vee_a \neg A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A : A}}{A : A, B}}{: A, A \rightarrow_m B} \quad \dfrac{}{A : A}}{(A \rightarrow_m B) \rightarrow_m A : A, A}}{(A \rightarrow_m B) \rightarrow_m A : A}}{: ((A \rightarrow_m B) \rightarrow_m A) \rightarrow_m A}$$

Estas derivações estabelecem, precisamente, aqueles princípios de inferência intuisticamente repugnantes que foram previamente mencionados. Assim, dado que *LK* demonstra os sequentes $: A \vee_a \neg A$ e $: ((A \rightarrow_m B) \rightarrow_m A) \rightarrow_m A$, $A \vee_a \neg A$ e $((A \rightarrow_m B) \rightarrow_m A) \rightarrow_m A$

são teoremas da lógica clássica, i.e., $\vdash_{CL} A \vee_a \neg A$, e, respectivamente, $\vdash_{CL} ((A \rightarrow_m B) \rightarrow_m A) \rightarrow_m A$. Dado que o sequente $\neg\neg A : A$ é demonstrável em *LK*, é verdade que $\neg\neg A \vdash_{CL} A$.

Uma simples inspecção às derivações acima mostra-nos que elas só correm caso ocorra mais do que uma fórmula nos sucedentes. Verifica-se que esta limitação é suficiente para gerar todos e apenas aqueles sequentes que expressam os enunciados de consequência intuicionisticamente válidos. Por outras palavras, *LJ* – que, repetindo, é apenas *LK* restringida a sucedentes em que ocorre apenas uma fórmula – captura a noção de validade intuicionista.

Obtemos um parente esquisito e menos popular (embora muito investigado) da lógica intuicionista se pensarmos criativamente sobre *LJ*: Que lógica obteríamos se restringíssemos, à moda intuicionista, os *antecedentes* de LK? A resposta é a seguinte: obtemos uma lógica *intuicionista dual*, assim chamada porque resulta de uma dualização da restrição intucionista sobre a cardinalidade, i.e., aplicando-a agora aos antecedentes. Tal como antes, deixamos ao leitor o exercício de apresentar, a partir de *LK*, as regras de $LDJ{\rightarrow_m}$ – o cálculo de sequentes para esta lógica (ver Urbas 1996 e Czermak 1977).

A lógica intuicionista dual é estranha por uma variedade de razões, incluindo as relações inferenciais que sanciona. Nela não se deriva $A, \neg A : B$, o que a torna uma lógica *paraconsistente*. A eliminação da dupla negação é satisfeita, i.e., $\neg\neg A : A$ é demonstrado, mas não permite a introdução da dupla negação. Nela também não se deriva o *modus ponens* sob a forma $A \wedge_a (A \rightarrow_m B) : B$ – a sua forma de duas premissas, banida pela definição, assim como a forma que utiliza $\wedge_m$ em vez de $\wedge_a$. Mais estranho ainda, $LDJ{\rightarrow_m}$ e *LK* (proposicionais) demonstram exactamente os mesmos teoremas (= sequentes com a forma $: A$), desde que A não contenha $\rightarrow_m$.

É fácil de entender a disrupção causada por $\rightarrow_m$. Lembremo-nos que $A \rightarrow_m (B \rightarrow_m A)$ é um teorema tanto da lógica clássica como da lógica intuicionista. Para obtermos o sequente $: A \rightarrow_m (B \rightarrow_m A)$, temos de aplicar Enfraquecimento no antecedente e, como tal, efectuar um passo na derivação no qual existirá um sequente que contém, pelo menos, duas fórmulas no antecedente:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overline{A : A}}{B, A : A}}{A : B \to_m A}}{: A \to_m (B \to_m A)}$$

Isto não pode ser feito na lógica intuicionista dual, daí que $\to_m$ seja mais fraca nela do que na lógica clássica ou intuicionista: existe, pelo menos, um sequente onde surge apenas $\to_m$, tal que o mesmo pode ser classicamente ou intuicionisticamente demonstrado, mas não dual-intuicionisticamente. A força plena da condicional clássica, no que respeita aos teoremas, pode ser recuperada na lógica intuicionista dual através de uma simples substituição de $\to$D(m) pelas duas regras

$$\frac{A : Y}{: Y, A \to_a B} \to \mathrm{D1(a)} \qquad \frac{C : Y, B}{C : Y, A \to_a B} \mathrm{D2(a)}$$

e de E$\to_m$ pela devidamente restringida E$\to_a$ (cf. Fig. 2). Que legitimidade temos para acreditar que os símbolos $\to_m$ e $\to_a$ têm o mesmo significado? Esta é uma questão difícil que vai directamente ao âmago de alguns desafios filosóficos colocados pela subestruturalidade. Não só não conseguimos, como também não necessitamos – felizmente – de lidar agora com eles. O que podemos fazer é argumentar, *en passant*, que $\to_a$ é um tipo de condicional e que cumpre realmente a sua função. Por um lado, o leitor pode verificar que ambos os conjuntos de regras são compatíveis com a tabela de verdade (clássica) para a condicional. (Pista: as fórmulas no antecedente correspondem à atribuição do valor *falso*, e as fórmulas no sucedente à atribuição do valor *verdadeiro*.) Por outro lado, em *LK* os dois conjuntos de regras para $\to$ são inter-deriváveis e, como tal, equivalentes, como o leitor poderá facilmente verificar.

Quando a restrição intuicionista-dual é aplicada, $\to$D1(a) e $\to$D2(a) implicam $\to_m$D. Por outras palavras, dada a premissa de $\to$D1(m), as aplicações de $\to$D1(a) e $\to$D2(a) são suficientes, *ceteris paribus*, para se obter a conclusão de $\to$D1(m):

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A : Y, B}{: Y, B, A \to_a B}}{: Y, A \to_a B, A \to_a B}}{: Y, A \to_m B}$$

A conversa não se verifica. Portanto, $\rightarrow_a$ é mais forte do que $\rightarrow_m$. Esta força suplementar é suficiente para recuperar os teoremas clássicos que $\rightarrow$D(m) não consegue apresentar. Assim, se desejarmos que a nossa lógica intuicionista dual recupere todos os teoremas classicamente válidos, $LDJ\rightarrow_m$ será um cálculo sub-óptimo. Ele terá de ser substituído por $LDJ\rightarrow_a$, i.e., o cálculo que se obtém a partir de *LK* através da aplicação da restrição intuicionista-dual nos antecedentes, e substituindo $\rightarrow$D(m) por $\{\rightarrow$D1(a), $\rightarrow$D2(a)$\}$ e E$\rightarrow_m$ por E$\rightarrow_a$. Repare-se que, neste caso, a condicional intuicionista-dual não satisfaz o *modus ponens* e a introdução da condicional (se B for deduzível de A, então $A \rightarrow B$. Com efeito, na lógica intuicionista dual não existe pode existir qualquer conectiva # tal que $A \# B$ se e somente se $A : B$. Deixamos a demonstração a cabo do leitor. Para mostrá-lo, podemos recorrer ao facto de *LK* e *LDJ* terem os mesmos teoremas para mostrar que, caso exista tal conectiva, $A : \neg\neg A$ é derivável em *LDJ*.

Isto conduz-nos a um ponto geral acerca de *LK*, ilustrado pelo caso das regras para $\rightarrow$. Dado o conjunto de todas as regras subestruturais, existem várias opções equivalentes (i.e. inter-deriváveis) para formular as regras para as conectivas. Voltaremos a este ponto nos parágrafos seguintes, onde se verá o que acontece quando *não* são permitidas aplicações de Enfraquecimento e Contracção.

2.1 *Sem Enfraquecimento e sem Contracção*: *conectivas aditivas, multiplicativas e Lógica Linear*

Começamos por apresentar alguma terminologia 'anatómico-fisiológica' do cálculo de sequentes. Na aplicação de uma regra, a ocorrência de uma fórmula que é introduzida na conclusão do sequente é *principal*. Nas premissas, as ocorrências de fórmulas que fazem parte da fórmula principal são *activas*. Portanto, em $\vee$D1(a), $A \vee_a B$ é *principal* e A é *activa*. Em $\neg$E, A é *activa* e $\neg A$ é *principal*.

As fórmulas que não são activas nem principais, são *passivas*, e referimo-nos a elas colectivamente como *contextos* (da aplicação da regra). Entre as regras de *LK* com duas premissas, o leitor pode identificar dois padrões distintos relativos aos seus contextos. (Isto corresponde a outra dualidade de padrões – *não* acerca dos contextos –

presentes nas regras de uma só premissa para as conectivas binárias. Deixamos ao leitor a tarefa de a revelar). Em $\wedge$D(a) e $\vee$E(a), os contextos são os mesmos nos sequentes-premissas, encontrando-se colapsados (= não-duplicados) no sequente-conclusão. Em $\rightarrow$E(m), por outro lado, os contextos são (potencialmente) diferentes nas premissas, sendo tratados como tal na conclusão.

Isto não tem de se verificar. É fácil reparar que, na presença de Troca, Enfraquecimento e Contracção, permitir que os sequentes-premissa incluam contextos diferentes, ou exigir que estes sejam comuns às premissas, não faz diferença quanto à derivabilidade de sequentes. Por exemplo, a regra $\wedge$D(a), na Figura 1, é equivalente (inter-derivável) à regra:

$$\frac{X : Y, A \qquad W : Z, B}{X, W : Y, Z, A \wedge_m B} \wedge \mathrm{D(m)}$$

etc. Para estabelecer que isto é o caso, é suficiente aplicar Enfraquecimento, Contracção e Troca. (Esta é uma das razões pelas quais, na observação 1, p. 4, advertimos os leitores para não inferirem que $\#_a$ é diferente de $\#_m$ com base na mera diferença de subscritos).

Às regras com duas premissas, que não requerem identidade de contextos nas mesmas, chamamos *multiplicativas*. Àquelas que assim o exigem chamamos *aditivas*. Esta terminologia estende-se às próprias conectivas.

Em *LK*, qualquer conectiva binária com uma introdução multiplicativa à direita (esquerda) necessita de uma única introdução à direita (esquerda). As regras para $\rightarrow_m$ ilustram precisamente este ponto. Para um outro exemplo, de veia semelhante, repare-se que podemos emparelhar $\wedge$D(m) com

$$\frac{A, B, X : Y}{A \wedge_m B, X : Y} \wedge \mathrm{E(m)}$$

O par $\wedge$D(m)-$\wedge$E(m) pode ser adicionado a *LK* sem que isso afecte a sua relação de derivabilidade. *Pari passu*, o mesmo par pode substituir as regras originais de $\wedge$ sem que isso afecte a derivabilidade. Tudo aquilo que se pode demonstrar com as regras originais pode ser também demonstrado pelas regras multiplicativas.

Este resultado tem um alcance geral. Qualquer conectiva binária de *LK* pode ser apresentada como *multiplicativa* (Tabela 1) ou *aditiva*

(Tabela 2). (A classificação da negação como 'conectiva multiplicativa' pode ser entendida como uma convenção). Com efeito, tanto as regras da Figura 2 e da Tabela 1, como as regras da Figura 2 e da Tabela 2, junto com as regras para a negação, oferecem formalizações completas e consistentes da lógica clássica. O mesmo se aplica a qualquer combinação de introduções à esquerda/direita para qualquer conectiva nestas tabelas. (O leitor é convidado a ponderar no que aconteceria, e.g., à Contracção, caso → fosse governada por →E(m), →D1(a) e →D2(a). De forma mais geral, o leitor pode explorar a relação entre as regras aditivas/multiplicativas mistas para uma conectiva e as regras estruturais para o Enfraquecimento e a Contracção.)

	E	D
$\wedge_m$	$\dfrac{A, B, X : Y}{A \wedge_m B, X : Y}$	$\dfrac{X : Y, A \qquad W : Z, B}{X, W : Y, Z, A \wedge_m B}$
$\vee_m$	$\dfrac{A, X : Y \qquad B, W : Z}{A \vee_m B, X, W : Y, Z}$	$\dfrac{X : Y, A, B}{X : Y, A \vee_m B}$
$\to_m$	$\dfrac{X : Y, A \qquad B, W : Z}{A \to_m B, X, W : Y, Z}$	$\dfrac{A, X : Y, B}{X : Y, A \to_m B}$
$\neg$	$\dfrac{X : Y, A}{\neg A, X : Y}$	$\dfrac{A, X : Y}{X : Y, \neg A}$

TAB. 1. Conectivas multiplicativas

	E	D
$\wedge_a$	$\dfrac{A, X : Y}{A \wedge_a B, X : Y}$ $\dfrac{B, X : Y}{A \wedge_a B : X}$	$\dfrac{X : Y, A \qquad X : Y, B}{X : Y, A \wedge_a B}$
$\vee_a$	$\dfrac{A, X : Y \qquad B, X : Y}{A \vee_a B, X : Y}$	$\dfrac{X : Y, A}{X : Y, A \vee_a B}$ $\dfrac{X : Y, B}{X : Y, A \vee_a B}$
$\to_a$	$\dfrac{X : Y, A \qquad B, X : Y}{A \to_a B, X, Y}$	$\dfrac{A, X : Y}{X : Y, A \to_a B}$ $\dfrac{X : Y, B}{X : Y, A \to_a B}$

TAB. 2. Conectivas Aditivas

O nosso passo seguinte é motivado por razões de expediência: iremos desembaraçar-nos da Troca. Em *LK* e *LJ*, as regras de Troca tornam supérflua a ordenação das fórmulas no antecedente e no sucedente.

O seu efeito pode ser obtido através de uma modificação da estrura dos próprios sequentes: em vez de os entendermos como sequências, podemos antes interpretá-los, sem corrermos riscos, como *multi-conjuntos*. Um *multi-conjunto* é um conjunto no qual se monitoriza o número de ocorrências dos seus membros. Assim, embora $\{a, a, b\}$ e $\{a, b\}$ sejam *o mesmo conjunto* – observando-se as habituais convenções de notação – eles são *multi-conjuntos* diferentes. Enquanto o primeiro contém duas ocorrências do elemento a, o segundo contém apenas uma. Por outras palavras, um multi-conjunto é uma sequência *não*-ordenada. (O leitor astuto pode já ter reparado que, estando o Enfraquecimento e a Contracção disponíveis, os próprios multi-conjuntos são desnecessariamente complexos para efeitos de formalização das lógicas clássica e intuicionista.)

A ausência de Enfraquecimento e Contracção é suficiente para não permitir que as conectivas aditivas e multiplicativas se identifiquem umas com as outras. Assim, no que resta da secção, aplicaremos uma política mais cuidadosa no que respeita à identidade das conectivas lógicas, distinguindo as conectivas subscritas com a das conectivas subscritas com m. Com efeito, utilizaremos símbolos diferentes para elas, escrevendo $\otimes$, $\oplus$ e $\multimap$ para $\wedge_m$, $\vee_m$ e $\rightarrow_m$, respectivamente, e $\vee$ e $\wedge$ onde antes usávamos $\vee_a$ e $\wedge_a$.

$$\frac{}{:\mathbf{1}} \quad \frac{X : Y}{X, \mathbf{1} : Y} \quad \frac{}{\mathbf{0} :} \quad \frac{X : Y}{X : Y, \mathbf{0}} \quad \frac{}{X : Y, \top} \quad \frac{}{\bot, X : Y}$$

FIG 3. Conectivas nulárias de *LL* – aditivas ($\top$, $\bot$) e multiplicativas (**1**, **0**)

Defina-se um sequente *linear* como um par de *multi-conjuntos* finitos de fórmulas, numa linguagem $\mathcal{L}_{LL} = \{\wedge, \vee, \otimes, \oplus, \multimap, \neg, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \top, \bot\}$, e seja *LL* o cálculo que consiste em Id, Corte, e nas regras que governam as conectivas em $\mathcal{L}_{LL}$. *LL* captura o fragmento *multiplicativo-aditivo* da lógica linear de Girard (MALL) (Girard 1987, Girard *et al*. 1989) (para apresentações menos idiossincráticas, ver Troelstra 1992 ou Di Cosmo e Miller 2019). O que distingue MALL como lógica subestrutural é a distinção, nela rigorosamente aplicada, entre aditivas e multiplicativas. Mas que razões teremos para fazer isto?

A lógica linear implementa um tipo de sensibilidade aos recursos que se encontra ausente nas lógicas clássica e intuicionista(-dual); nesta medida, ela pode ser vista como um refinamento de ambas estas lógicas. Repare-se que, em certos casos, a aplicação de Enfraquecimento não introduz uma nova fórmula no antecedente/sucedente, mas sim uma nova ocorrência de uma fórmula que existia já no antecedente/sucedente da premissa que é objecto dessa aplicação. Assim como este tipo de Enfraquecimento permite multiplicar indefinidamente o número de ocorrências de uma fórmula num sequente, a Contracção, por seu lado, permite comprimi-las (ou melhor, contraí-las!) numa só. Por outras palavras, caso se disponha de Enfraquecimento e Contracção, ter uma ocorrência da fórmula A num sequente é o mesmo que ter 100. Se pensarmos na ocorrência de uma fórmula numa derivação como um *recurso*, o Enfraquecimento faz com que esse recurso se encontre disponível em quantidades ilimitadas; já a Contracção, por seu lado, torna grátis o armazenamento de recursos. A lógica linear assume uma perspectiva mais realista quanto aos 'recursos': eles podem ser gastos e, quando disponíveis, ocupam espaço!

De entre todos os exemplos até aqui utilizados, apenas a eliminação da dupla negação pode ser demonstrada na lógica linear. Mas repare-se nesta situação curiosa: embora a lei do terceiro excluído falhe quanto a $\vee$, ela obtém quanto a $\oplus$ – o leitor é convidado a verificar este facto. Noutros casos, as relações inferenciais que não se aplicam nem aos fragmentos puramente aditivos, nem aos fragmentos puramente multiplicativos, podem, contudo, aplicar-se a um vocabulário aditivo-multiplicativo misto. Por exemplo, embora os princípios distributivos (a) $A \wedge (B \vee C) : (A \wedge B) \vee C$ e (m) $A \otimes (B \oplus C) : (A \otimes B) \oplus C$ falhem, o sequente 'misto' $A \wedge (B \oplus C) : (A \wedge B) \oplus C$ é derivável em LL:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B : B} \qquad \dfrac{}{C : C}}{B \oplus C : B, C}}{A \wedge (B \oplus C) : B, C} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A : A}}{A \wedge (B \oplus C) : A}}{A \wedge (B \oplus C) : A \wedge B, C}}{A \wedge (B \oplus C) : (A \wedge B) \oplus C}
$$

Observação 2. A linguagem completa da lógica (proposicional) linear contém dois operadores unários adicionais, ! e ?, que servem para especificar que o Enfraquecimento e a Contracção podem ser aplicados à fórmula em cujo operador principal eles se encontram, respectivamente, no antecedente e no sucedente.

Observação 3. Repare-se que a *LL* falta a implicação aditiva. Esta é a apresentação mais comum da lógica linear (pelo menos em círculos filosóficos). Contudo, $\to_a$ pode ser adicionada ao léxico básico, obtendo-se um cálculo equivalente a *LL* (cf. Troelstra 1992).

2.3 *Lógicas Relevantes e Enfraquecimento* (*quanto baste*)

As seguintes derivações estão correctas em *LK* e *LJ*:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A : A}}{B, A : A}}{A : B \to A}}{: A \to (B \to A)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A : A}}{\neg A, A :}}{\neg A, A : B}}{A : \neg A \to B}}{: A \to (\neg A \to B)}$$

(Tendo em conta que já sabemos que a derivabilidade em *LK* e *LJ* não é afectada pela distinção aditivas/multiplicativas, podemos colocar de lado os subscritos. Repare-se que as contrapartes destas derivações formuladas com $\to_a$ também estão correctas. À luz da discussão que se segue, e da mecânica dessas derivações, o leitor poderá vir a suspeitar, correctamente, que $\to_a$ esconde uma forma de Enfraquecimento. *Ditto* para as restantes cognitivas aditivas.)

Assim, os sequentes finais das derivações apresentadas expressam validades (teoremas) clássicos e intuicionistas. Alguns lógicos questionam-se se eles não expressarão validades *simpliciter*: afinal, estamos perante os *paradoxos da implicação material*, i.e., fórmulas que têm instâncias contraintuitivas quando $\to$ é interpretada como 'se…, então'. C. I. Lewis foi um dos primeiros – e talvez o mais famoso – céptico (cf. Lewis 1918, Lewis e Langford 1932; ver também Mares e Paoli 2019). Os proponentes de lógicas relevantes pegaram neste tema. A consequência (ou implicação) lógica, diz-nos o seu argumento, está sujeita a uma condição de relevância, que se aplica às premissas e à conclusão; essa conclusão, naturalmente, não pode ser expressa pela $\to$ (definida de modo a assegurar a derivabilidade dos paradoxos) (ver Anderson e Belnap 1975, Mares e Paoli 2014, e Mares 2020);

para uma abordagem à lógica relevante diferentemente motivada, ver Read 1988).

A relevância torna-se um tema algo obscuro quando abstraímos dos conteúdos das nossas premissas e conclusão – tal como a lógica exige que façamos. Ainda assim, ela preserva algum do seu poder. No mínimo, tem de se observar uma condição para a *partilha de variáveis*. Na medida em que, *sempre que A implica B, tem de existir pelo menos uma variável frásica que A e B têm de partilhar*, está-se aqui a falar de uma condição necessária formal para a relevância e, *a fortiori*, para a implicação. É óbvio que $A \to (B \to A)$ – se A é verdadeira, então A é implicada por um qualquer B – não obedece, em geral, a esta condição (por exemplo, deixe-se A ser p e B ser q). *Ditto* para $A \to (\neg A \to B)$ – uma falsidade (contradição) implica seja o que for.

Mas o que é que $\to$ tem a ver com a implicação? Tal como sugerido em §1, o sinal de sequente : presta-se a ser interpretado como 'implica'. O antecedente de um sequente pode ser interpretado como expressando as premissas de um argumento, e o sequente como expressando a sua, ou suas, conclusões. Como tal, $\to$ parece consistir numa codificação intra-linguística da relação de implicação, em que $A \to B$ (como em $\to$D) assinala, na linguagem objecto, que A implica B ($A : B$) (para um extenso argumento a favor de uma versão elaborada desta tese, ver Došen 1989). Dado que os paradoxos são obtidos *via* aplicação de Enfraquecimento, é natural pensar que um requisito mínimo para se obter a relação *relevante* de implicação consiste em desautorizar essa aplicação ao antecedente.

Se for disto que estamos à procura, *adicionar* Contracção a *LL* será uma maneira bastante simples de se obter o resultado desejado. Ficamos com '*R sem distribuição*', também conhecida como 'a lógica preferida de… ninguém'. (Como é sabido, *R* é a lógica paradigma das lógicas relevantes; ver Anderson e Belnap 1975). A classificação dúbia de 'lógica mais detestada de sempre', gozada por '*R sem distribuição*', está relacionada com a proibição cega (claramente sub-óptima) do uso de Enfraquecimento, exigida por muitos defensores da relevância. Sem Enfraquecimento, o princípio associativo $A \wedge (B \vee C) : (A \wedge B) \vee C$ não é derivável, tal como o leitor poderá verificar através de uma busca de demontração invertida. E, no entanto, trata-se de uma regra não só inofensiva, de uma perspectiva ir(relevante), mas também de enorme utilidade quando se pretende obedecer ao imperativo da 'mutilação mínima': qualquer que seja o modo escolhido para resolver as limitações da lógica clássica, deve-se evitar ao máximo a perda de poder inferencial. Perder a distributividade para evitar implicações irrelevantes não compensa.

Acontece que é bastante complicado desenvolver um cálculo de sequentes para *R* inteiro. A elaboração de um cálculo de sequentes para o fragmento de *R* que não tem negação foi levada a cabo, independentemente, por Dunn (1974) e Mints (1976) (cuja edição russa original foi publicada em 1972). Na sua essência, este cálculo permite-nos aplicar Enfraquecimento de uma forma selectiva. Estas aplicações são autorizadas, por exemplo, aquando da interacção entre $\wedge$ e $\vee$, e banidas quando se lida com $\rightarrow$, onde gerariam irrelevâncias.

No cálculo de sequentes de Dunn-Mints para *R* positiva, LR^+, os sucedentes encontram-se sujeitos à condição intuicionista, i.e., não pode ocorrer neles mais do que uma fórmula. Por sua vez, os antecedentes operam com dois modos estruturais de combinar fórmulas. (O leitor poderá notar quão importante é esta ideia no âmbito da lógica subestrutural – a existência de modos distintos de combinar premissas (e conclusões). Ver, e.g., Slaney 1990.) Enquanto um deles, designado por '*extensional*', permite aplicar Enfraquecimento, o outro, designado como '*intensional*', não o permite. Podendo as combinações de fórmulas num antecedente ser, elas próprias, combinadas de várias maneiras, os antecedentes possuem uma estrutura mais complexa, consistindo em *sequências de sequências encaixadas de fórmulas*. Usaremos a notação $X[A; B]$ ($X[A, B]$) para denotar a sequência intensional (extensional) $A; B$ (A, B) encaixada na sequência X, a qual pode ser extensional ou intensional. Estas operações estruturais são ambas contractivas, comutativas e associativas – convidamos o leitor a escrever as regras apropriadas. O Enfraquecimento aplica-se às vírgulas desde que $Y \neq \emptyset$ (o motivo para esta restrição é explicado abaixo):

$$\frac{X[Y]:A}{X[Y, Z]:A}$$

As conectivas lógicas encontram-se adequadamente emparelhadas com as combinações, intensionais ou extensionais, de fórmulas: as vírgulas correspondem a $\wedge$ e $\vee$, e o ponto-e-vírgula a $\otimes$ e $\rightarrow$. (Habitualmente, referimo-las como 'conjunção extensional' e 'conjunção intensional, ou 'conjunção' e 'fusão', respectivamente. Repare-se, também, que as correspondência entre , e $\vee$, e entre ; e $\otimes$ podem ser interpretadas num sentido forte de acordo com o qual as conectivas internalizam estes 'operadores' estruturais na linguagem objecto.) Para exemplificar as alterações de notação, apresentamos apenas as regras para $\otimes$ e $\rightarrow$.

$$\frac{X[A; B] : C}{X[A \otimes B] : C} \quad \frac{X : A \qquad Y : B}{X; Y : A \otimes B}$$

$$\frac{X[A] : B}{X : A \rightarrow B} \quad \frac{X : A \qquad Y[B] : C}{Y[X; A \rightarrow B] : C}$$

Em LR^{+}, os antecedentes vazios são motivo de algum embaraço. Em combinação com aplicações de Corte aos teoremas, eles podem introduzir irrelevâncias:

$$\frac{: A \qquad \dfrac{\overline{A : A}}{A, B : A}}{B : A}$$

Torna-se, por esta razão, necessário adicionar ao cálculo a conectiva zero-ádica **t**, governada pelas regras

$$\overline{: \mathbf{t}} \quad \frac{X[B] : C}{X[B; \mathbf{t}] : C}$$

e formular o Corte

$$\frac{X : A \qquad Y[A] : B}{Y[X] : B}$$

sujeito à seguinte restrição: se $X \neq \emptyset$, então Y[X] é $Y[\mathbf{t}]$. Podemos pensar em **t** como sendo a constante de verdade intensional ou o teorema 'relevante' que implica qualquer outro teorema de R. Na verdade, pode-se perfeitamente utilizar este estratagema para substituir qualquer antecedente vazio de LR^{+} por um outro que contenha **t**. (Ver §3.2 para uma aplicação do mesmo.)

Deixamos ao leitor a tarefa de verificar que, neste cálculo, a conjunção distribui sobre a disjunção e a condicional não satisfaz nem o paradoxo positivo nem o negativo.

2.3 *Lógicas sem Corte e Id*

As lógicas mencionadas no título desta subsecção são recém-chegadas ao território já ricamente povoado das lógicas subestruturais. Isto deve-se, em parte, à maneira tradicional de conceber Id e Corte como regras que codificam as propriedades da consequência lógica – reflexidade e transitividade, respectivamente. Estas são geralmente encaradas como condições *sine qua non* da consequência, mais do que, propriamente, a monotonicidade das premissas, uma propriedade que é codificada por EE e que foi desafiada no contexto das lógicas relevantes. (Ver Beall e Restall 2006; existem, evidentemente, excepções, cf. Cobreros et al. 2013, Tennant 2017, 2022.)

Ainda assim, existe uma enorme riqueza de questões filosóficas (e técnicas) suscitadas pela sua avaliação. Antes disso, contudo, é preciso dizer algo sobre a motivação para lidar com essas 'lógicas' bizarras.

Grande parte do interesse que é suscitado por esta forma radical de subestruturalidade resulta da tentativa de lidar com paradoxos. Uma versão fortalecida do Paradoxo do Mentiroso, 'Esta frase não é verdadeira', é uma boa ilustração. Podemos expressar este paradoxo adicionando à nossa linguagem um predicado de verdade T, governado pelas regras

$$\frac{A, X : Y}{T\langle A\rangle, X : Y} \qquad \frac{X : Y, A}{X : Y, T\langle A\rangle}$$

Com T à disposição, o Mentiroso é fielmente reproduzido através de uma frase $\lambda =_{\mathrm{def}} \neg T\langle\lambda\rangle$. Isto significa, obviamente, que, em qualquer derivação, λ pode ser substituído por $\neg T\langle\lambda\rangle$ (e o converso). Como tal, é possível 'raciocinar' em *LK* do seguinte modo (e também em *LJ*, desde que se façam pequenos ajustes à derivação abaixo – deixados a cabo do leitor):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{T\langle\lambda\rangle : T\langle\lambda\rangle}}{\neg T\langle\lambda\rangle, T\langle\lambda\rangle :}}{: \lambda, T\langle\lambda\rangle}}{: T\langle\lambda\rangle, T\langle\lambda\rangle}}{: T\langle\lambda\rangle} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{T\langle\lambda\rangle : T\langle\lambda\rangle}}{\neg T\langle\lambda\rangle, T\langle\lambda\rangle :}}{\lambda, T\langle\lambda\rangle :}}{T\langle\lambda\rangle, T\langle\lambda\rangle :}}{T\langle\lambda\rangle :}}{:}$$

Aplicando Enfraquecimento, podemos derivar qualquer sequente a partir do sequente :. Isto são más notícias, pois significa que a relação de consequência assim gerada é *trivial*, i.e., o que quer que seja implica seja o que for. Este resultado nefasto *não poderia* ter sido obtido sem Corte nas últimas duas linhas da derivação.

Observação 4. O uso de T pressupõe que existe uma maneira de atribuir nomes às frases da linguagem. Este operador, que permite nomear frases – representado por $\langle\ldots\rangle$ – é tido como parte integral de T, no sentido em que não existem regras para o seu uso que sejam independentes de T.

O caso de Id é mais complicado. Note-se, em primeiro lugar, que, dadas as definições daquilo em que consiste uma derivação no cálculo de sequentes (§1), não existe maneira de começar uma derivação sem recorrer a Id. Como tal, para se levar a sério a possibilidade de lógicas não-reflexivas no âmbito do cálculo de sequentes, é necessário adoptar uma definição mais liberal de *derivação de sequentes*, permitindo que as folhas de derivação sejam compostas por sequentes arbitrários. Nesse caso, o que mais se assemelha à derivação acima é uma derivação que, em vez de ter origem em $\overline{T\langle\lambda\rangle : T\langle\lambda\rangle}$, começa com folhas rotuladas com $T\langle\lambda\rangle : T\langle\lambda\rangle$. Enquanto a derivação anterior nos mostrava que o que quer que seja implicava seja o que for, a nova derivação, por seu lado, mostra-nos que, caso *suponhamos* que $T\langle\lambda\rangle$ se implica a si própria, podemos obter qualquer consequente. (Para uma discussão aprofundada deste ponto, ver French 2016).

Tratada a questão da motivação, podemos ir agora à logica propriamente dita. Começamos com um caso que desafia a própria caracterização de subestruturalidade. Em qualquer um dos casos até aqui discutidos, abandonar ou restringir a aplicação de uma regra estrutural resultava na impossibilidade de derivar algum sequente derivável em *LK*. Por outras palavras, obtinha-se uma lógica mais fraca. Agora vamos encontrar um caso em que isto não parece suceder! De maneira a simplificar a exposição, lidaremos primeiro com a questão no contexto da teoria dos modelos, passando depois para considerações relacionados com sistemas de demonstração.

O leitor que se dedique a rever a literatura recente sobre paradoxos e subestruturalidade irá deparar-se, inevitavelmente, com a lógica ST, dita *estrita-tolerante* (Cobreros et al. 2013). Esta designação evoca uma peculiaridade da noção de satisfatibilidade que é utilizada na apresentação de ST. Esta lógica recorre ao esquema avaliativo forte de Kleene, o qual opera com três valores de verdade, $\{0, ½, 1\}$, naturalmente ordenados através da relação $\leq$, i.e., $0 \leq ½ \leq 1$. Os valores das fórmulas moleculares são computados do seguinte modo: $v(A \wedge B) = min\ (v(A), v(B))$; $v(A \vee B) = max\ (v(A), v(B))$; $v(A \rightarrow B) = max\ (1 - v(A), v(B))$; $v(\neg A) = (1 - v(A))$.

O que é peculiar em ST é o facto de as premissas e as conclusões de uma inferência estarem sujeitas a normas de satisfação distintas. As premissas são governadas por uma norma *estrita*, expressa através da atribuição do valor 1. As conclusões são governadas por uma norma *tolerante*, expressa por um valor diferente de 0, i.e., um valor incluído em $\{1, ½\}$. Uma valoração v satisfaz uma inferência se e somente se *satisfaz tolerantemente* as sua(s) conclusões, sempre que as suas premissas são *satisfeitas estritamente*. Por exemplo, as valorações $v(p) = v\ (q) = ½$ e $v'(p) = 1$, $v'(q) = ½$ satisfazem ambas $p \wedge q : p$; $: p \rightarrow (q \rightarrow p)$ e $p, p \rightarrow q : q$. Na verdade, *qualquer* valoração *estrita e tolerante* no espaço de Kleene satisfaz *qualquer* inferência classicamente válida.

Todavia, dada esta semântica, é possível encontrar *contra-exemplos* ao Corte se interpretarmos λ como ½. Se desejarmos um outro exemplo, podemos considerar uma valoração v tal que $v(p) = 1$, $v(q) = ½$ e $v(r) = 0$. Neste caso, $p : q$ e $q : p$ são ambos satisfeitos por v, embora $p : r$ não o seja. Porquê? Porque embora p seja estritamente satisfeita, r não é tolerantemente satisfeita.

Observação 5. A dialéctica da situação é mais complicada do que estes exemplos poderão sugerir. O primeiro não concerne à lógica *per si*, mas sim a uma *teoria* (ingénua da verdade) sobre ela construída – pelo menos, não *prima facie* (para uma discussão deste ponto, ver Dicher e Paoli 2019, §18.5.2). O segundo exemplo também só é logicamente relevante caso se adopte uma visão particular, ainda que bastante natural, daquilo que faz com que uma regra de *sequente-para-sequente* seja considerada boa (ver *infra*, p. 24). (Tal como se apresentam, ambos os exemplos ilustram o mesmo ponto: embora o Corte seja eliminável em *LK*, o mesmo não tem de se verificar nas *teorias* construídas com base nesta lógica.) Porém, tudo o que se deseja por agora é transmitir ao leitor uma ideia dos 'mecanismos' que se encontram por detrás dos casos em que, dada a semântica de ST, o Corte falha.

É este mesmo fenómeno que desejamos replicar no contexto de uma teoria da demonstração baseada no cálculo de sequentes. Quais serão, então, as características de um cálculo de sequentes para ST? A resposta simples é que este teria de ser uma *versão* de *LK* em que o Corte estaria ausente. Por motivos de simplicidade e conveniência expositiva, iremos não só considerar uma versão algo radical, mas também uma vasta família de cálculos à qual pertence a nossa variante.

No que abaixo se segue, o léxico oficial é composto pela negação e pelas conectivas governadas pelos conjuntos de regras {∨D(m), ∨E(a)}, {∧D(a), ∧E(m)}, {→D(m), →E(a)}, as quais serão representadas por ∨, ∧ e → *simpliciter*. De uma perspectiva clássica, estas regras e as regras de *LK* são inter-deriváveis. Por uma questão de simplicidade, os sequentes terão a forma de pares de multi-conjuntos aos quais se aplica Enfraquecimento e Contracção. Estas duas regras estruturais, juntamente com as regras operacionais para ¬, ∨, ∧ e →, compõem o cálculo base *PK*, o qual, voltamos a insistir, *não contém* Id ou Corte. Uma extensão de *PK* com Corte terá a designação pouco original de '*PK* ∪ {*Corte*}'. Se adicionarmos Id a *PK*, obtemos *PK* ∪ {*Id*}. Adicionando ambos, obtemos o cálculo *PK* ∪ {*Id*, *Corte*}.

PK ∪ {*Id*} é um cálculo para ST. Eis porquê. Como foi dito acima, as suas regras operacionais e as regras operacionais de *LK* são inter-deriváveis. Isto significa, *inter alia*, que qualquer sequente derivável em *LK* pode ser derivado em *PK* ∪ {*Id*, *Corte*}. Gentzen demonstrou que se pode eliminar o Corte de *LK* – esta foi a sua *Hauptsatz*, um teorema para a eliminação do Corte. Assim, qualquer sequente de *LK* que possa ser derivado com Corte pode também ser derivado sem ele. Este resultado aplica-se a *PK* ∪ {*Id*, *Corte*} de uma forma não-problemática. Como tal, qualquer sequente derivável em *PK* ∪ {*Id*, *Corte*} pode ser derivado em *PK* ∪ {*Id*}, e o converso também é verdade (ainda que o último não contenha Corte). Tudo somado, obtém-se exactamente aquilo que se exige de ST: todos os sequentes classicamente válidos, sem ser necessário recorrer ao Corte.

Este resultado é de certa maneira surpreendente. Tendo em conta a explicação informal do modo de interpretar os sequentes, i.e., como enunciados acerca de relações de consequência, *PK* ∪ {*Id*, *Corte*} (= *LK*) e *PK* ∪ {*Id*} determinam, precisamente, a mesma relação de consequência e, *a fortiori*, a mesma lógica. Mais especificamente, ambas determinam a *lógica clássica*. E, no entanto, embora a primeira seja *transitiva*, a segunda não o é! Como é que isto pode ser?

Recomendamos ao leitor que pondere esta questão – à qual voltaremos em §3.2 – e passamos, entretanto, a $PK \cup \{Corte\}$, que trará consigo uma nova dose de perplexidades. Lembremo-nos que, neste cálculo, é permitido compor as folhas da derivação com sequente arbitrários, de modo que a seguinte é uma derivação correcta em $PK \cup \{Corte\}$ (e, *a fortiori*, em *PK*):

$$\dfrac{\dfrac{A, B : C \wedge A \qquad A, B, D :}{A, B, (C \wedge A) \to D :}}{A, B, (C \wedge A) \to D : \neg D}$$

A lógica determinada por este cálculo possui uma contraparte (semântica) que tem uma relação de parentesco com ST: a lógica TS – como o nome sugere, a versão dual de ST. Uma inferência em TS (= um sequente de $PK \cup \{Corte\}$) seria válida se e somente se a(s) conclusões fossem estritamente satisfeitas (= tomam o valor 1) sempre que as premissas fossem tolerantemente satisfeitas (= tomam os valores de $\{½, 1\}$). Assim, dadas quaisquer fórmulas $A_1,\ldots, A_n$, a valoração que atribuiria ½ a cada uma das variáveis frásicas em $A_1,\ldots, A_n$ faria com que cada A_i tomasse o valor ½. Para cada inferência de TS em que se conectassem premissas e conclusões pertencentes a $A_1, \ldots, A_n$, esta valoração satisfaria todas as premissas, mas não as conclusões. Como tal, não existem quaisquer inferências (sequentes) válidos em TS. (Do ponto de vista da teoria da demonstração, isto significa que em TS não existem sequentes deriváveis com zero suposições.) Em que medida se pode, então, chamar a TS uma 'lógica'?

As respostas às duas questões levantadas nesta secção irão depender do estatuto das transições premissas-conclusão que são, de facto, realizadas num cálculo de sequentes. Estas transições entre sequentes, usualmente designadas na literatura como *meta-inferências*, podem elas próprias ser avaliadas, em dois sentidos *distintos*, com respeito à sua validade (cf. Dicher e Paoli 2019):

(1) Quanto à preservação da validade dos sequentes (= *validade global*)

(2) Quanto à preservação da satisfação dos sequentes (= *validade local*)

A opção (1) estabelece uma ligação entre a derivabilidade de sequente-para-sequente e a preservação da validade (dos sequentes). Neste sentido, as derivações estão correctas sempre que, partindo de premissas-sequente válidas, elas não produzem conclusões-sequente inválidas. A opção (2) estabelece uma ligação entre a derivabilidade de sequente-para-sequente e a preservação da satisfação (dos sequentes). A derivação de um sequente a partir de outros sequentes estaria correcta se e somente se qualquer valoração que satisfizesse os sequentes-premissa, satisfaria também os sequentes-conclusão.

Embora TS seja inferencialmente vazia, ela não é meta-inferencialmente vazia. As suas regras primitivas são, global e localmente, válidas (por referência à semântica acima descrita). Repare-se que, neste caso, a validade global não é particularmente interessante. Dado que TS não possui sequentes válidos, isso significa que não existem contra-exemplos às meta-inferências de TS, i.e., não existem casos em que conclusões inválidas se sigam de premissas válidas. Vamos poder constatar que, relativamente à validade local, TS corresponde (num sentido que falta especificar) à lógica não-clássica K3, i.e., à *lógica forte de Kleene* (Malinowski 1993, Gottwald 2020). (Em termos gerais, a validade local é uma propriedade bem mais forte do que a validade global. O exemplo de Corte apresentado nesta secção mostra-nos, precisamente, que o Corte não preserva a validade local em ST. Note-se também que a meta-inferência de $p : q$, $q : r$ para $p : r$ é, ainda assim, globalmente válida, pois os seus sequentes-premissa não são válidos.)

Resumindo, embora ST possa coincidir inferencialmente com a lógica clássica, elas não irão coincidir meta-inferencialmente uma com a outra. Embora TS possa ser inferencialmente vazia, ela não o será meta-inferencialmente. TS e ST forçam-nos a olhar com mais atenção para as transições de sequentes-para-sequente (também designadas como 'meta-inferências' ou 'meta-sequentes') e, especialmente, para o seu papel na caracterização das lógicas. É isso que iremos fazer em §3.2.

3 Tópicos filosóficos

Nas secções seguintes, lançaremos um olhar abrangente sobre alguns problemas filosóficos suscitados pela subestruturalidade (ou nela tratados). Em §3.1 discutiremos a relação entre as regras operacionais e as regras estruturais, e em §3.2 a relação entre as regras estruturais e as relações de consequência. Remataremos em §3.3 com uma breve discussão acerca da 'definição' de subestruturalidade utilizada neste apontamento.

3.1 *Regras estruturais e vocabulário lógico*

A conveniente distinção entre regras estruturais e regras operacionais tem sido fonte de muita perplexidade e entusiasmo filosófico, especialmente no âmbito de uma visão do significado das conectivas que, tal como a própria distinção, tem a sua origem na obra de Gentzen (1935). Gentzen fez notar que as regras de introdução (na dedução natural) podem ser vistas como 'definições' (*implícitas*) das constantes lógicas. As correspondentes regras de eliminação seriam, assim, determinadas em função das introduções. (Para além do artigo original de Gentzen (1935), Prawitz (1965) é outra referência canónica para a dedução natural e para as semânticas prova-teoréticas. Ver também Ungar (1992) para uma análise mais aprofundada da relação entre a dedução natural e o cálculo de sequentes, ou Restall (2022) para uma discussão em passo ligeiro, mas abrangente em perspectiva, sobre demonstrações e sistemas de demonstração ao estilo de Gentzen.)

Este apontamento casual de Gentzen transformou-se na raiz de uma nova abordagem à semântica das conectivas lógicas – denominada, por Peter Schroeder-Heister (2018), 'semântica prova-teorética'; ver também Francez (2015), para uma apresentação do estado-da-arte técnico do programa, e Dummett (1991) para a sua articulação filosófica canónica. Os aspectos mais particulares da proposta de Gentzen, e o desenvolvimento subsequente desta tradição, saem fora dos limites deste apontamento. Para aquilo que nos interessa, basta referir que a ideia de interpretar as regras do cálculo de sequentes como definições – ou, de modo equivalente, como algo que determina o significado das conectivas – é uma extensão natural da sugestão de Gentzen. De acordo com este espírito, podemos ser mais liberais quanto às regras que determinam esses significados; esta distinção especial não tem necessariamente de se aplicar às introduções (à direita). Com efeito, o quadro em que iremos operar será bastante ecuménico: os *pares* de introduções à esquerda/direita serão interpretados como definições. Tudo o nos resta é lidar com estas putativas definições.

Isto transforma o modo como a distinção operacional/estrutural é entendida. Dada a caracterização oferecida das lógicas subestruturais, parece que, pelo menos nalguns casos, elas partilham o mesmo vocabulário. Àparte o interesse intrínseco de tão conspícuo fenómeno, o assunto tem consequências no que respeita a doutrinas filosóficas independentes. Ele parece estabelecer, por exemplo, a possibilidade de uma genuína rivalidade entre lógicas. Tomem-se estas, *grosso modo*, como teorias acerca do que se segue do quê em virtude do vocabulário lógico. Se as conectivas tiverem significados diferentes em lógicas diferentes, então essas lógicas saõ teorias acerca de coisas diferentes e, como tal, não podem ser rivais umas das outras (Quine 1970, Paoli 2003). Se, por outro lado, as conectivas tiverem o mesmo significado em várias lógicas subestruturais, elas podem, então, ser vistas como rivais genuínas umas das outras. O mesmo argumento poderá também servir de ingrediente para se defender um tipo de pluralismo lógico, muito explorado nas últimas duas décadas, de acordo com o qual o significado das conectivas permanece inalterado (Beal e Restall 2006, Dicher 2016, Ferrari e Orlandelli 2019). Pense-se nisto como uma 'rivalidade sem causa'. O pluralismo lógico é a perspectiva segundo a qual existe mais do que uma lógica correcta, ou seja, que existem várias teorias correctas, não-equivalentes entre si, acerca do que é que se segue do quê.

Susan Haack (1996, primeira edição de 1974) foi uma das primeiras a formular um argumento favorável à tese de que as conectivas têm o mesmo significado num número (cuidadosamente escolhido) de lógicas não-clássicas. Haack observa que, no caso de a diferença entre lógicas resultar apenas das diferenças entre as suas regras estruturais, então 'é difícil perceber como é que podemos explicá-la como algo que se deve apenas ao significado das conectivas'. Será este um argumento sólido?

Se restringirmos a nossa atenção apenas a *LK* e *LJ*, então será difícil resistir-lhe. Exceptuando a restrição à cardinalidade que se aplica aos sequentes de *LJ* – e, desse modo, às regras e suas aplicações – nada mais as distingue. Pode ser que, aos olhos do leitor céptico, essa diferença tenha ainda de ser explicada, embora essa tarefa não pareça ser demasiado complicada. Pode-se, por exemplo, tomar as regras estruturais como algo que especifica o 'contexto de dedutibilidade' de um antecedente – usando a já famosa expressão de Belnap (1962) – um 'ambiente' para construir demonstrações em que apenas são permitidas inferências cuja validade é independente do vocabulário lógico.

Aqui o termo chave é 'antecedente' e o problema consiste apenas em determinar a sua correcta aplicação. Em certo sentido intuitivo, os assuntos estruturais têm primazia sobre os operacionais. Por exemplo, mesmo numa linguagem desprovida de constantes lógicas, as inferências estruturais continuam a estar disponíveis. (Ver Zardini (2011) para uma crítica a esta tese, ou Dicher (2018, 2019) para a discussão de uma alternativa à mesma). Segundo esta visão, desenhar uma lógica consiste em especificar um ambiente onde se realizam demonstrações e, só depois, oferecer as ferramentas operacionais para as realizar, em consonância com esse ambiente (cf. Restall 2014).

Na literatura mais recente, esta ideia de que 'as regras operacionais são idênticas quando diferem apenas estruturalmente tem sido designada como 'tese da identidade' (Dicher 2016). Ainda que apelativa, ela não se encontra imune a críticas.

Considere-se, por exemplo, as regras $\wedge$E(a)1, $\wedge$E(a)2 e $\wedge$D(m), que diferem das regras $\wedge$E(a)1, $\wedge$E(a)2 e $\wedge$D(a) apenas estruturalmente. Segundo a tese da identidade, os dois conjuntos de regras definem (determinam) a mesma conectiva. A verdade (ou falsidade) desta afirmação não pode ser determinada apenas verificando se essas regras podem ser usadas para demonstrar estritamente os mesmos sequentes. Se regras estruturalmente diferentes definem a mesma conectiva, então elas têm de se comportar de modo semelhante quando se trata, por exemplo, de estabelecer o seu sucesso *qua* definições inferenciais (cf. *infra*, Obs. 6).

Contudo, isto não se verifica a respeito da maioria dos critérios específicos que determinam o sucesso das definições inferenciais. Para uma ilustração simples deste ponto, basta considerar a *inversibilidade* como critério desse sucesso. (A justificação desta escolha não cabe nos limites deste artigo. Ainda assim, o leitor pode considerar o facto de a inversibilidade assegurar que as regras são analíticas; nada se ganha e nada se perde, na passagem das premissas para as conclusões, quando se aplica uma regra invertível.) Dado um conjunto de introduções E/D para uma constante #, estas definem com sucesso # se e somente se pelo menos uma das regras for *invertível*. Uma regra do cálculo é dita *invertível* se e somente se o seu sequente-conclusão implicar os seus sequentes-premissa. Uma simples inspecção às regras $\wedge$E(a)1, $\wedge$E(a)2 e $\wedge$D(m) é suficiente para estabelecer que nenhuma delas é invertível. Considere-se, por exemplo, uma derivação que contenha uma aplicação de $\wedge$E(a)1 e que estabeleça $A \wedge B, X : Y$. A regra pode aplicar-se a uma de duas premissas – $A, X : Y$ e $B, X : Y$ – mas não é possível determinar a qual delas foi aplicada. (Fica a cargo do leitor descobrir por que razão $\wedge$D(m) não é inversível).

Observação 6 (Acerca do critério de sucesso definicional). Uma coisa é dizer que as regras de inferência determinam o significado, ou são definições, das constantes lógicas; outra é fazer com que essa suposta 'determinação do significado' seja bem-sucedida – por outras palavras, que a 'constante lógica' putativamente definida tenha um significado coerente. Embora Gentzen estivesse consciente deste problema – e tenha, com efeito, concebido um tal critério – outros que trabalhavam na mesma tradição inferencialista (amplamente concebida) não o estavam. Prior (1960) mostrou o quão perniciosa foi esta omissão, criando uma 'conectiva' *tonk*, introduzida como conjunção no antecedente e como disjunção no sucedente. Deixamos ao leitor a tarefa de mostrar que, e.g., adicionando *tonk* a *LK*, o sequente $A : B$ passa a ser demonstrável.

Observação 7 (Guia de leituras). Para várias posições acerca do porquê/como da invertibilidade ser um critério satisfatório de sucesso definicional, ver Došen (1989), Restall (2019) ou Gratzl e Orlandelli (2019). Para uma discussão mais abrangente e tecnicamente detalhada da invertibilidade, ver Chapman (2009). Para uma crítica à tese da identidade, baseada em critérios distintos de sucesso definicional, ver Dicher (2016). Aquilo que se designou como 'sucesso definicional' encontra-se estreitamente relacionado com a 'harmonia' (das semânticas prova-teoréticas), cuja referência clássica é Dummet (1991). A literatura despoletada pela discussão da harmonia em

Dummett é vasta; Francez (2015) e Schroeder-Heister (2018) são bons pontos de partida.

Não nos devemos deixar abalar pela queda da tese da *identidade*. Alegrem-se as gerações futuras, pois as coisas tornam-se mais complicadas a partir daqui! Iremos rever algumas dessas complicações nos parágrafos seguintes.

Relembremos *LK* e a sua mistura de conectivas binárias aditivas (conjunção e disjunção) e multiplicativas (a condicional). Já sabemos que, no contexto da base estrutural de *LK*, existem cálculos puramente aditivos (ou multiplicativos) equivalentes. Como tal, de um ponto de vista clássico, não existe diferença entre as conectivas multiplicativas e aditivas (desde que haja inter-derivabilidade). Isto não se aplica a *LJ* ou, para todos os efeitos, a *LDJ*. Na primeira não existe espaço (trocadilho intencional) para a disjunção multiplicativa; na segunda acontece o mesmo com a conjunção multiplicativa. A lista de exemplos pode ser alargada quase a nosso bel-prazer.

Qual é, portanto, a relação entre as conectivas, aditivas, multiplicativas e os cálculos aos quais elas podem ou não ser adicionadas? De um ponto-de-vista 'extensional', i.e., quanto ao *output* de sequentes, as multiplicativas e as aditivas são idênticas em *LK*, mas diferentes nas lógicas subestruturais. Estes factos são indisputáveis; a questão consiste em encontrar explicações *óptimas para os mesmos.*

Uma hipótese implausível é que as aditivas e as multiplicativas são idênticas em todos os 'contextos de dedutibilidade', estruturais ou subestruturais. Isto é obviamente problemático. Em contextos plenamente estruturais, tal contraria explicitamente a ideia de que regras distintas definem conectivas distintas, ideia esta que é essencial à perspectiva de que as regras determinam o significado. Em contextos subestruturais, esta hipótese é, no melhor dos casos, falsa; no pior, incoerente. De acordo com a quase maioria dos critérios razoáveis (sintácticos) de identidade para as conectivas lógicas, é possível demonstrar a falsidade da identidade aditivas/multiplicativas. Além disso, não seria possível determinar com clareza o que significa dizer que $\wedge_a$ é idêntica a $\wedge_m$ num contexto estrutural em que as regras da segunda não podem sequer ser formuladas.

A hipótese contrária, de que as aditivas são sempre diferentes das multiplicativas, parece sair-se melhor. A única dificuldade surge relacionada com os cálculos inteiramente estruturais, como é o caso de *LK*. O critério de identidade utilizado (para além da própria formulação das regras), seja ele qual for, nunca poderá ser a inter-derivabilidade *simpliciter*, pois isso iria simplesmente contradizer a hipótese. A inter-derivabilidade é, certamente, um critério fraco e rudimentar. Este não consegue dar conta, por exemplo, da clara diferença entre a derivação : $A \vee_a \neg A$ e uma das $A \vee_m \neg A$, mesmo em contextos inteiramente estruturais. (Para mais sobre isto, ver Dicher 2020).

Concluímos com a apresentação de uma perspectiva diferente sobre a relação entre aditivas e multiplicativas na lógica clássica. Uma maneira de abordar o tema consiste em sustentar que, embora sejam em princípio *distinguíveis* – dado que são governadas por regras distintas – elas são, no entanto, *indistinguíveis* na lógica clássica. Se isto for verdade, então as conectivas clássicas parecem ser *ambíguas* (Paoli 2007), combinando significados que, de outro modo (talvez no que respeita às regras), deveriam estar separados. Importa, mais uma vez, notar que esta alegada confluência apenas se verifica em relação ao *output* que resulta da aplicação das regras, e não à 'arquitectura' das provas. Ainda assim, o *output* das regras é a referência tradicional utilizada para avaliar as conectivas. Ora, o dom estrutural de *LK* é, sem dúvida, a raiz desta confluência e da resultante ambiguidade. Poder-se-á pensar, *eo ipso*, que este aspecto é responsável pela influência que as regras estruturais têm sobre o significado. A sua presença introduz ambiguidade e a sua ausência permite desambiguar.

3.2 Subestruturalidade e relações de consequência

Finalizámos a discussão das lógicas não-transitivas e não-reflexivas (§2.4) com uma breve discussão sobre as meta-inferências, articulando

- ***i.*** em que sentido ST difere da lógica clássica, apesar de conterem exactamente os mesmos sequentes válidos; e
- ***ii.*** em que sentido TS pode ser considerada uma lógica (não-degenerada), apesar de não conter quaisquer sequentes válidos.

O facto de ter sido necessário considerar outras estruturas que não os sequentes para se fazer distinções entre (putativas) lógicas (= relações de consequência) mostra-nos que existe ainda uma discussão a fazer acerca da maneira como os cálculos de sequentes determinam as relações de consequência. Ocupar-nos-emos dela nesta secção.

Vários comentários nas secções anteriores indicaram que estamos a operar implicitamente (de forma acrítica, senão mesmo dogmática) com uma perspectiva que, no essencial, *equipara os sequentes a enunciados acerca de consequências*. Mais precisamente, temos operado com uma noção de consequência capturada pela definição abaixo (Avron 1988, 1991):

Definição 1 (Consequência interna). Seja $\mathcal{SL}$ um cálculo de sequentes baseado numa linguagem $\mathcal{L}$. A relação de consequência interna determinada por $\mathcal{SL}$, $\vdash^{i}_{\mathcal{S}}$, consiste em todos os pares $\langle X, Y \rangle$ s.t. $\Vdash_{\mathcal{SL}} X : Y$, em que $\Vdash_{\mathcal{SL}}$ significa 'é demonstrável em $\mathcal{SL}$'.

Ainda que amplamente difundida, esta concepção, que identifica consequência com consequência interna, não está isenta de dificuldades (Dicher e Paoli 2021). Repare-se que, na definição acima, *X* e *Y* não se encontram plenamente especificadas. As nossas convenções notacionais identificam-nas como colecções de fórmulas, embora a definição nada nos diga acerca de que tipo de colecções estamos a falar. A sua 'natureza' é, portanto, herdada dos próprios sequentes. Se estes forem pares de conjuntos, então os *relata* (da consequência) são conjuntos; se forem pares de multi-conjuntos, os *relata* serão multi-conjuntos; quando uma condição respeitante à cardinalidade se aplica aos antecedentes/sucedentes, a mesma aplicar-se-á também aos relata da consequência, etc. Em geral, de acordo com a Definição 1, as propriedades da relação de consequência são herdadas da estrutura dos sequentes e dependem, de uma forma ainda mais geral, do stock disponível de regras estruturais.

Quando sistematicamente aplicado, este método de associar consequência ao cálculo de sequentes conduz a um resultado estranho. Em *LJ*, por exemplo, a consequência interna é tarskiana (cf. Definição 2 abaixo). Isto porque em *LJ* se exige que as regras obriguem os sequentes a comportar-se como conjuntos e onde os sucedentes são, no máximo, conjuntos unitários. Simultaneamente, o Enfraquecimento no antecedente, Id e Corte asseguram a monotonicidade, reflexividade e transitividade de $\vdash^{i}_{LJ}$.

Por outro lado, quando a lógica clássica é capturada por *LK* (ou qualquer uma das suas *variantes de múltiplas conclusões* mencionadas neste artigo), a relação de consequência não é tarskiana. Em vez disso, trata-se de uma consequência-Scott (Scott 1971), a qual, idêntica em quase tudo à tarskiana, permite que no lugar do segundo *relatum* figure um conjunto de cardinalidade (finita) arbitrária. Neste caso, passar de uma consequência-Scott para uma consequência-Tarski é uma operação trivial: fecha-se o sucedente sob disjunção ou prefixam-se as conclusões 'redundantes' com uma negação, movendo-as para o antecedente. Isto nada tem que ver, obviamente, com a utilização da Definição 1 enquanto *método* de associar a consequência ao cálculo de sequentes. Trata-se apenas de uma característica da lógica clássica.

A relação de consequência interna em *LR* e LR^+ terá ainda outras propriedades. Em LR^+, ela relacionará sequentes encaixados com conjuntos unitários. Tanto numa como noutra, a ausência de Enfraquecimento (pervasiva em *LR* e aplicada ao combinador de premissas intensional ; em LR^+) tornará a relação de consequência não-monotónica. Esta última, por sua vez, será diferente das consequências Tarski e Scott.

O que fazer com tudo isto? Se a definição acima for interpretada como uma espécie de análise da noção de consequência lógica, os resultados são de certo modo desapontantes. Dela não emerge qualquer concepção unitária de consequência lógica. Em vez disso, a imagem com que se fica é que a consequência lógica é algo de *fragmentado*. Não existe um tipo único de relação de consequência, pois cada cálculo de sequentes, estruturalmente distinto dos restantes, dará origem a um tipo distinto de consequência lógica. Isto não significa que todos as relações 'candidatas' sejam iguais entre si. Se se acreditar, e.g., que uma certa lógica é a lógica correcta, insistir-se-á, presumivelmente, que apenas um cálculo adequado a essa lógica é capaz de oferecer uma análise genuína de relação de consequência lógica.

Lembremo-nos, contudo, que lógicas diferentes podem ser apresentadas através de cálculos de sequentes estruturalmente diferentes – cf. as observações sobre as apresentações de *conclusão-múltipla* da lógica intuicionista ou sobre as apresentações de *conclusão-única* da lógica clássica na p. 41. No mínimo, se nestes casos for possível defender a ideia de que todos os cálculos são iguais entre si, então, para além de um problema de fragmentação, teremos também um problema de *indeterminação*. Não existirá, e.g., uma resposta inequívoca à seguinte questão: 'A consequência lógica intuicionista é de conclusão-única ou de conclusão-múltipla?'

Ora, tudo isto parece enquadrar-se com o seguinte facto sociológico: A pergunta 'O que é uma relação de consequência lógica?' não tem uma resposta unívoca. (Ver Mares e Paoli (2014) para uma apreciação das propostas fundamentais). Como tal, não nos devemos preocupar demasiado com a variedade de tipos de consequência lógica que podem ser identificados através do 'método interno'.

Existe, contudo, uma *referência-padrão* para entender a noção de consequência – pelo menos no sentido sociológico de que se trata da perspectiva dominante, resultante da análise axiomática pioneira de Tarski (e que deve ser distinguida da análise *semântica* em Tarski 1956):

Definição 2 (Consequência Tarskiana). Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem proposicional e $Fm(\mathcal{L})$ o conjunto das suas fórmulas. Uma *relação de consequência* é uma relação $\vdash \subseteq \mathcal{P}(Fm(\mathcal{L})) \times Fm(\mathcal{L})$, obedecendo às seguintes condições para todo X, $Y \in \mathcal{P}(Fm(\mathcal{L}))$ e A, $B \in Fm(\mathcal{L})$:

- *Reflexividade*: $X \vdash A$, sempre que $A \in X$;
- *Monotonicidade*: se $X \vdash A$, então $X \cup Y \vdash A$;
- *Transitividade*: se $X \vdash A$ para todo $A \in Y$ e $Y \in B$, então $X \vdash B$.

Observação 8. Se a relação de consequência assim definida for uma *relação lógica*, então é necessário adicionar uma condição de *invariabilidade na substituição*. Por motivos de simplicidade, iremos deixá-la de lado nos parágrafos que se seguem. A definição acima também não exige que os *relata* sejam finitos. Contudo, este é um aspecto que, dada a natureza finita das demonstrações *qua* objectos sintácticos, emerge naturalmente no contexto de uma abordagem sintática (i.e., na teoria da demonstração) à noção de consequência. Mais uma vez, esta é uma complicação que iremos simplesmente deixar de lado.

Acontece que existe uma maneira de implementar a mencionada referência-padrão, mesmo no caso das lógicas subestruturais. Encontram-se, por vezes, na literatura menções a um modo alternativo de associar as relações de consequência aos cálculos de sequentes. Baptizada por Avron (1988) como 'externa', ela é definida da seguinte maneira (ver também Troelstra 1992):

Definição 3 (Consequência externa). Seja $\mathcal{SL}$ um cálculo de sequentes baseado numa linguagem $\mathcal{L}$. A relação de consequência externa, determinada por $\mathcal{SL}$, $\mathcal{SL} \vdash^{e}_{\mathcal{SL}}$, é a relação de conclusão-única que consiste em todos os pares de $\langle X, A\rangle$, para $X \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{L})$ e $A \in \mathcal{L}$, s.t. $\Vdash_{\mathcal{SL} \cup \{:B_i\}} : A$, para todo $: B_i \in X$, em que o *Corte é uma regra primitiva*.

Isto significa que uma fórmula A é uma consequência externa de um *conjunto* de fórmulas $X = \{B_1, \ldots, B_n\}$ se e somente se o sequente : A for derivável na extensão de $\mathcal{S}$, adicionando-se os sequentes axiomáticos $: B_1, \ldots, : B_n$. A partir daqui é fácil mostrar que, e.g., o *modus ponens* vigora externamente em *LK* e *LJ*. Enquanto que internamente ela é expressa através do sequente $A, A \to B : B$, a sua expressão externa consiste em afirmar que $: A$ e $: A \to B$ conjuntamente implicam $: B$. Isto pode ser estabelecido pela derivação abaixo:

$$\dfrac{\dfrac{}{: A \to B} \qquad \dfrac{\dfrac{}{: A} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A : A} \quad \dfrac{}{B : B}}{A, A \to B : B}}{A \to B : B}}{: B}$$

De igual modo, o sequente $A; A \to B; A \to (B \to C) : C$ é derivável em LR^+ e, como tal, $A, A \to B, B \to C \vdash^{i}_{LR^+} C$ também. Verifica-se, ainda, que $A, A \to B, B \to C \vdash^{e}_{LR^+} C$. Para mostrar que isto é o caso, será mais conveniente trabalhar com uma variante de LR^+ que não tenha antecedentes vazios, já mencionada no fim de §2.3. Nela, os sequentes com a forma $: A$ são substituídos por sequentes com a forma $\mathbf{t} : A$. Temos assim que, para $X = \{\mathbf{t} : A, \mathbf{t} : A \to B, \mathbf{t} : A \to (B \to C)\}$, $A, A \to B, B \to C \vdash^{e}_{LR^+} C$ se e somente se $\Vdash_{LR^+ \cup X} \mathbf{t} : C$. A seguinte derivação mostra-nos que o lado direito da bicondicional é verdadeiro:

$$\dfrac{\dfrac{}{\mathbf{t} : A \to (B \to C)} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\mathbf{t} : A \to B} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\mathbf{t} : A} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A : A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A : A} \quad \dfrac{}{B : B}}{A, A \to B : B} \quad C : C}{A, A \to B, B \to C : C}}{A, A \to B, A \to (B \to C) : C}}{\mathbf{t}, A \to B, A \to (B \to C) : C}}{\mathbf{t}, A \to (B \to C) : C}}{\mathbf{t} : C}$$

Contudo, embora $A, B \nvdash^{i}_{LR^+} A$, também $A, B \vdash^{e}_{LR} A$, pois $\mathbf{t} : A$ é um axioma do cálculo alargado $LR^+ \cup \{\mathbf{t} : A, \mathbf{t} : B\}$ e, portanto, nele derivável. Este exemplo mostra-nos que, se a relação de consequência interna de uma lógica subestrutural for sub-tarskiana, então ela não coincidirá com a sua relação de consequência externa, a qual é inteiramente tarskiana.

Esta *maneira* de associar as relações de consequência tarskianas às lógicas subestruturais é, pelo menos heuristicamente, sub-óptima. Trata-se de uma abordagem imposta com recurso à força bruta, onde os aspectos tarskianos da consequência são incorporados através de definições. Face às várias interpretações da noção de consequência, há o risco de incorrermos numa petição de princípio (cf. Cobreros et al. 2020). Pior do que isso, a Definição 3 deixa, pelo menos, uma propriedade da consequência – a transitividade – conectada a uma regra específica que pode ou não estar presente num cálculo de sequentes – o Corte. Mesmo que não se inclua na definição a cláusula relativa ao Corte, isto faz com que o recurso à mesma perca a sua razão de ser.

É possível resolver este problema de uma forma bastante elegante. Note-se que a consequência externa se aplica à derivabilidade entre sequentes – e não entre fórmulas – mas apenas no caso especial em que os sequentes têm antecedentes vazios (ou, em LR^+, virtualmente vazios). Por que não adoptar a derivabilidade sequente-para-sequente *simpliciter* e definir consequência com base nela?

Com efeito, porque não fazê-lo? Filosoficamente, tal como acabámos de ver, a derivabilidade sequente-para-sequente permite distinguir ST da lógica clássica e recuperar a não-vacuidade de TS. De um ponto de vista técnico, é relativamente fácil demonstrar que a derivabilidade sequente-para-sequente possui as propriedades tarskianas: 1) os sequentes são conjuntos, 2) as conclusões são únicas, e (3) é reflexiva, monotónica e transitiva (Dicher e Paoli 2019). Para fazê-lo de uma forma sensata, necessitamos, obviamente, de encontrar uma maneira de conectar as relações de consequência entre sequentes com as relações mais comuns entre fórmulas. (Para comparar, note-se que tal relação é claramente indicada no caso da consequência externa). Por outras palavras, temos de encontrar um maneira de comparar a relação de consequência em ontologias distintas. Felizmente, este encontra-se já disponível sob a forma da chamada 'teoria Blok-Jónsson' da *equivalência entre relações de consequência* (Blok e Jónsson 2006).

Uma *relação de consequência* Blok-Jónsson é uma generalização 'ontológica' da consequência tarskiana. Em vez de operar sobre uma ontologia específica (no caso de Tarski, uma ontologia de fórmulas), a consequência Blok-Jónsson opera sobre ontologias *arbitrárias*. Ou seja, para se obter uma definição de consequência Blok-Jónsson, substitui-se a referência a $Fm(\mathcal{L})$, na Definição 2, pela referência a um conjunto arbitrário. Este conjunto arbitrário pode ser instanciado de diversas maneiras: como um conjunto de fórmulas, equações, sequentes, hiper-sequentes, etc. Suponha-se agora que existem traduções mutuamente inversas, de umas ontologias para as outras, que preservam a relação de consequência (avaliadas par a par). (Isto significa que se *a* implica *b* em alguma ontologia, então, numa outra ontologia, a imagem de *a* implica a imagem de *b*; além disso, ao traduzirem-se as próprias imagens para a ontologia inicial, obtém-se *a* e *b*). Ficaríamos, assim, com uma relação de equivalência (chamada 'similaridade' (Blok e Jónsson 2006) entre as diferentes instanciações da consequência Blok-Jónsson.

Com isto em mente, para compararmos a consequência em sequentes com a consequência em fórmulas, podemos prosseguir da seguinte maneira. Partindo da relação de consequência entre sequentes, é possível determinar a sua classe de equivalência por meio das traduções acima mencionadas. As mais simples e naturais mapeiam os sequentes em fórmulas: traduzem os antecedentes fechando-os sob disjunção, os sucedentes sob conjunção, e o sinal de sequente através da condicional. Em sentido oposto, cada fórmula é simplesmente traduzida como um sequente com antecedente vazio, em que a fórmula original ocupa o lugar do sucedente.

Observação 9. Em LR^+ as traduções são mais complicadas, e em *LK* (tal como na família de cálculos *PK*) existem outras opções nas quais o sinal de sequente não é traduzido pela condicional. O leitor certamente se divertirá ao tentar desenvolver estas considerações.

Esta noção de consequência lógica produz algumas surpresas no que diz respeito à radicalidade das lógicas subestruturais apresentadas em §2.4. Sucede que $PK \cup \{Id\}$, enquanto cálculo para ST, é semanticamente incompleto de acordo com a noção local de validade

$$\frac{X : Y, A \wedge B}{X : Y, A} \quad \frac{X : Y, A \wedge B}{X : Y, B} \quad \frac{A \wedge B, X : Y}{A, B, X : Y}$$

$$\frac{X : Y, A \vee B}{X : Y, A, B} \quad \frac{A \vee B, X : Y}{A, X : Y} \quad \frac{A \vee B, X : Y}{B, X : Y}$$

$$\frac{X : Y, A \to B}{A, X : Y, B} \quad \frac{A \to B, X : Y}{X : Y, A} \quad \frac{A \to B, X : Y}{B, X : Y}$$

$$\frac{X : Y, \neg A}{A, X : Y} \quad \frac{\neg A, X : Y}{X : Y, A}$$

FIGURA 4. As regras operacionais inversas dos cálculos *PK*

(Dicher e Paoli 2019). Ou seja, existem inferências válidas em ST, de sequente-para-sequente, que não podem ser nela demonstradas. Um exemplo bastante simples é a inferência de $X : A \wedge B$ para $X : A$. Isto éuma consequência directa (1) do modo como estão desenhadas as regras operacionais de PK $\cup$ $\{Id\}$ (ou de qualquer cálculo de sequentes *standard*) e (2) da ausência de Corte. As regras operacionais introduzem sempre fórmulas mais complexas nas suas conclusões. A única regra capaz de reduzir a complexidade é o Corte, tornando a conclusão de uma inferência de sequente-para-sequente menos complexa do que as suas premissas. (A complexidade de um sequente é medida através da complexidade máxima dos seus componentes; e esta, por sua vez, é medida pelo número de operadores que nele ocorrem).

Isto pode ser facilmente remediado se adicionarmos a *PK* $\cup$ $\{Id\}$ as inversas das suas regras operacionais (cf. Figura 4). Com efeito, é possível alargar desta maneira qualquer cálculo de sequentes baseado em *PK*, os quais nomeamos anexando *I* a *PK*. Assim, os sequentes (1)-(4) são válidos, tal como se mostra nas derivações abaixo, assim como as consequências expressas em fórmulas:

(1) $: \neg(A \wedge B) \vdash_{PKI} : \neg A \vee \neg B$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{: \neg (A \wedge B)}{A \wedge B :}}{A, B :}}{A : \neg B}}{: \neg B, \neg A}}{: \neg A \vee \neg B}$$

(2) $: A \vee B, : \neg A \vdash_{PKI \cup \{Corte\}} : B$

$$\dfrac{:\neg A \qquad \dfrac{\dfrac{: A \vee B}{: A, B}}{\neg A : B}}{: B}$$

(3) $\vdash_{PKI \cup \{Id\}} : A \vee \neg A$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A : A}}{: A, \neg A}}{: A \vee \neg A}$$

(4) $A, \neg A \vdash_{PKI\, :} : B$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{: A} \qquad \dfrac{:\neg A \qquad \dfrac{\dfrac{}{A : A}}{\neg A, A :}}{A :}}{:}}{: B}$$

O estudo sistemático destas relações de correspondência de sequente-para-sequente revela-nos que elas determinam as mesmas relações de consequência que estão associadas às lógicas não-clássicas LP, K3 e FDE (Přesonil 2017).

K3 foi já mencionada e conectada a TS, i.e., a $PKI \cup \{Id\}$ (*supra*, p. 24). Semanticamente, é a lógica que se obtém a partir do esquema de valoração forte de Kleene quando se exige que a consequência preserve o valor 1.

LP, a 'lógica dos paradoxos', primeiro introduzida e defendida por Asenjo (1966), e depois por Priest (1979), é obtida a partir das mesmas valorações, exigindo-se a preservação dos valores 1 ou ½. Isto corresponde a ST ($PKI \cup \{Id\}$).

Finalmente, *PKI* corresponde à lógica que, seguindo um hábito estabelecido, designamos aqui como FDE – implicação de primeiro grau [*first degree entailment*] – e para a qual 'Dunn-Belnap' teria sido um nome mais apropriado. Nos dias que correm, FDE é usualmente representada como uma lógica verofuncional de quatro valores, preservando os valores 1 e *b* num espaço de possibilidades lógicas que reconhece também os valores 0 e *n*. (De um modo informal, estes valores lêem-se como *verdadeiro* (= 1), falso (= 0), *verdadeiro e falso* (= *b*, um 'excesso'), e *nem verdadeiro nem falso* (= *n*, uma 'lacuna'). As valorações das fórmulas atómicas são alargadas de modo a abarcar a atribuição de valores de verdade às fórmulas moleculares, de acordo com as seguintes matrizes:

$\wedge$	1	b	n	0
1	1	b	n	0
b	b	b	0	0
n	n	0	n	0
0	0	0	0	0

$\vee$	1	b	n	0
1	1	1	1	1
b	1	b	1	b
n	1	n	1	n
0	1	b	n	0

$\neg$	
1	0
b	b
n	n
0	1

O valor de verdade da condicional pode ser determinado pela equação $v(A \to B) = v(\neg A \vee B)$. (Ver Omori e Wansing 2017, e as referências que aí surgem, para uma perspectiva mais detalhada de FDE e suas versões).

Nenhuma destas lógicas é habitualmente tida como subestrutural. Com efeito, na sua apresentação habitual através do cálculo de sequentes, elas são plenamente estruturais (Beall 2013).

3.2 Caracterizando as lógicas subestruturais

No último parágrafo de §1 (pp. 5-6), a caracterização oferecida de uma lógica subestrutural contém dois ingredientes. Primeiro, elas são mais *fracas* do que a lógica clássica. Segundo, esta fraqueza deve-se à ausência de regras estruturais (ou à sua restrição) da *LK* de Gentzen. O primeiro parâmetro não poderia ser mais claro e incontroverso; o mesmo não acontece com o segundo, i.e., a referência a um cálculo de sequentes *específico* para a lógica clássica.

Tem de se admitir que existe algo no mínimo estranho e, em última instância, insatisfatório, nesta conexão (demasiada apertada) entre a subestruturalidade e um tipo particular de cálculo lógico, mais ainda quando falamos de um cálculo *específico*. Com efeito, não se trata de algo frequente. Došen (1989) é tentado a dar o primeiro destes passos, mas recusa enfaticamente dar o segundo – compreensivelmente, podemos acrescentar. Desde logo, existem outros meios, além do cálculo de sequentes, de 'implementar' as lógicas subestruturais – a dedução natural, por exemplo (Restall 2000). Por outro lado, existem muitas apresentações equivalentes no cálculo de sequentes da lógica clássica que, ainda assim, podem ser distinguidas quanto à sua estrutura, não resultando daí diferenças particularmente relevantes. Porque se deve, então, atribuir a *LK* um lugar tão proeminente? Esta e outras preocupações similares tornam-se ainda mais prementes se nos lembrarmos do imperativo segundo o qual

> [d]evemos distinguir a *mera apresentação de uma lógica* (uma semântica ou um sistema dedutivo particular, ou uma lista de verdades lógicas, etc.) da *lógica ela mesma* (os *princípios constitutivos* (*i.e.*, os princípios que entram na definição) de uma teoria geral das propriedades lógicas, tal como, e.g., a consequência lógica. (Zardini 2011, n. 33)

Quando se trata de caracterizar a subestruturalidade, a prática mais difundida consiste em usar a 'lógica clássica', ao passo que nós optámos por usar '*LK*' (cf., e.g., Došen 1993, Restall 2019, Zardini 2011). Assim, Restall (2019) caracteriza as lógicas subestruturais como 'lógicas não-clássicas, mais fracas do que a lógica clássica, onde se faz notar a ausência de regras estruturais presentes na lógica clássica'. Embora não deixe de ser uma caracterização informativa, ela não é inteiramente desprovida de problemas.

A locução 'regras estruturais presentes na lógica clássica' é bastante imprecisa. Tanto as apresentações semânticas da lógica clássica, como aquelas ao estilo de Hilbert, quando consideradas em si mesmas, não contêm 'regras estruturais'. (A questão de saber o que é uma regra de uma lógica, independentemente da sua apresentação específica, é, na verdade, bastante abstrusa.) Elas satisfazem, claro, várias propriedades que podem ser expressas inferencialmente (como a transitividade) e que, num certo sentido, são entendidas como correspondentes às regras estruturais de um cálculo de sequentes (ou, de maneira geral, a uma apresentação de uma lógica à maneira de Gentzen).

Também é possível caracterizar a lógica clássica através de cálculos de sequentes de conclusão-única, i.e., cálculos de sequentes que contêm apenas uma fórmula, não-repetida, no sucedente. (*Pari passu*, é igualmente possível caracterizar (parcialmente) a lógica intuicionista através de cálculos de conclusão-múltipla (Dragalin 1987)).

Portanto, adicionando-se a seguinte regra a *LJ*, obtém-se a lógica clássica:

$$\frac{p, X : C \qquad \neg p, X : C}{X : C}$$

Este resultado é demonstrado por Negri e von Plato (2001) para o cálculo *G3ip*, uma variante de *LJ*, mas pode ser directamente aplicado a *LJ*. 'Esta' lógica clássica não contém Enfraquecimento (na sua plena força) no sucedente. É claro que se pode adicionar esta regra sem com isso afectar a 'classicalidade' do sistema obtido.

Verificam-se problemas similares com a caracterização de Zardini (2011), segundo a qual uma lógica é 'estrutural se e somente se incluir todos os princípios estruturais da lógica clássica, e de outro modo subestrutural' (p. 27, ênfase removido). Na verdade, os problemas parecem tornar-se ainda mais severos, pois o termo ‘princípio’ parecer ter um significado ainda menos preciso do que o termo 'regra'. Como Zardini sugere, o fecho sob substituição é um 'princípio estrutural' da lógica clássica. Contudo, embora se trate de uma propriedade da lógica clássica, não é necessário que seja também uma regra estrutural da mesma.

As tentativas acima mencionadas de oferecer uma caracterização não-superficial das lógicas subestruturais são avançadas no contexto de uma interpretação *standard* do cálculo de sequentes em que os mesmos são vistos como enunciados acerca da relação de consequência (supra §3.2). Esta interpretação utiliza habitualmente a noção tarskiana de consequência ou, então, ignora a distinção ente consequência tarskiana e consequência Scott. Assim, tais caracterizações acabam, talvez involuntariamente, por identificar a subestruturalidade com a noção de sub-Tarskiano – uma tendência que tem vindo a tornar-se mais explícita nos últimos anos (Barrio et al. 2018, Tennant 2022). Nesta perspectiva, uma lógica é considerada como subestrutural apenas se a sua relação de consequência não satisfizer pelo menos uma das propriedades características da relação de consequência tarskiana, *q.v. supra* §3.2. Não haveria aqui grande motivo de queixa, não fosse o facto de isto ignorar, de forma gritante, os cálculos de conclusão-múltipla. Não é particularmente convincente o esforço necessário para colmatar o fosso entre a interpretação tradicional dos sequentes de *LK* e a característica da consequência clássica que consiste em adimitir uma única conclusão, o mesmo acontecendo com a rejeição dos formalismos de conclusão-múltipla. Pior ainda, nem uma coisa nem outra são compatíveis com a interpretação revisionista dos sequentes e da sua relação com a consequência lógica (esboçadas em §3.2).

Isto não significa que não haja problema em ter como referência um cálculo particular (para além do problema mencionado no parágrafo inicial). Existe uma certa ambiguidade quando se fala da ausência ou restrição das regras estruturais. O Corte está *ausente de LK sem Corte*; é isso que nos diz o português. Contudo, dado o teorema da eliminação de Corte, esta 'ausência' é inconsequente. Embora ausente da formulação do cálculo, o Corte continua a ser nele *permitido* – ou seja, pode ser-lhe adicionado sem que isso provoque alterações no conjunto de sequentes deriváveis. Não desejaríamos, claro, identificar como subestrutural uma lógica induzida por $LK \backslash \{Corte\}$ se a 'ausência de corte' significasse apenas que ele não se encontra explícito no cálculo. (O que acontece, então, a $PK \cup \{Id\}$? Se nos recusássemos a identificar ST com a lógica clássica, teríamos de argumentar que, em certa medida, o Corte não se encontra apenas ausente dela, mas também – e isto é crucial – que *não lhe pode ser adicionado*. Mais sobre este tema em Dicher e Paoli (2019)).

De igual modo, também se pode dizer que um cálculo $LK^{m\text{-}conjuntos}$ – que difere de *LK* apenas por não conter explicitamente regras de Troca e por os seus sequentes serem multi-conjuntos de fórmulas – não contém regras de Troca sem que, com isso, estejamos a dizer que estas se encontram *de facto* ausentes. Num cálculo em que a ordem das fórmulas nos antecedentes e nos sucedentes não tem qualquer relevância, torna-se desnecessário formular explicitamente essas regras. Seria, no entanto, errado dizer que esta lógica não obedece aos princípios de inferência codificados pela Troca, apesar de estes não se encontrarem explicitamente formulados no cálculo. Quando se caracterizam as lógicas subestruturais por referência a um cálculo, tem de se ter em conta a distinção entre diferenças estruturais superficiais e diferenças estruturais substantivas.

Referidas estas subtilezas, temos de reconhecer que elas ultrapassam os modestos objectivos deste apontamento. Contentamo-nos em assinalar o problema. A sua investigação e eventual resolução são deixadas para outra altura.

4 Em vez de conclusão: Outras leituras

A nossa atenção confinou-se às linguagens proposicionais, tendo-se ignorado os quantificadores. Para obter uma ideia do que se passa nesse campo, o leitor pode consultar, e.g., Paoli (2005) e Zardini (2011). Apesar de as técnicas algébricas terem sido utilizadas – e continuarem a sê-lo – para investigar as lógicas subestruturais, optámos aqui por não as mencionar. Para esse efeito, veja-se Galatos et al. (2007) ou a segunda parte de Paoli (2002). Com uma pequena excepção em §2.4, onde a simplicidade do esquema de valoração forte de Kleene nos foi útil, nada se disse acerca da teoria dos modelos para as lógicas aqui mencionadas. Isto deve-se em grande parte ao facto de as lógicas subestruturais não terem uma semântica uniforme, no sentido (ingénuo) em que não existe uma família única de semânticas que se ajustam a toda e qualquer lógica subestrutural. Na verdade, as lógicas mencionadas neste artigo têm diferentes tipos de semânticas. Ver, sobre isto, Hiroakira (1993). Embora a abordagem tenha sido realizada, em larga medida, no contexto da teoria da demonstração, a nossa atenção focou-se em apresentações relativamente comuns. Mais especificamente, nada foi dito acerca das técnicas de 'exibição', de hiper-sequentes, etc. Acerca deste ponto, ver Belnap (1982), Goré (1998), Restall (1998), Wansing (1998) ou Avron (1994). Para uma persepectiva geral sobre estes e outros formalismos, bastante utilizados no estudo das lógicas não-clássicas e, em particular, das lógicas subestruturais, ver Kimbo (2014). O leitor poderá obter uma visão mais abrangente de quão rico é o campo das lógicas estruturais ao consultar as monografias, ainda actuais, de Paoli (2002) e Restall (2003). O único sinal evidente de que foram publicadas há mais de vinte anos é que nelas não se discutem as lógicas mencionadas em §2.4.[1]

Bogdan Dicher
LanCog, Centro de Filosofia da Universidade de Lisboa

1 Estou grato ao Bruno Jacinto e ao Ricardo Santos, que leram versões preliminares deste texto e contribuiram para melhorá-lo, e também ao Diogo Fernandes, que o traduziu do Inglês para o Português. Este trabalho recebeu o apoio financeiro da Fundação para a Ciência e a Tecnologia, através do projecto CEECIND/02877/2018.

Referências

Anderson, Alan R., and Nuel D. Belnap. 1975. *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*, *Volume* 1. Princeton University Press.
Asenjo, F. G. 1966. A calculus of antinomies. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 7: 103.
Avron, Arnon. 1988. The semantics and proof theory of linear logic. *Theoretical Computer Science* 57(2–3): 161–184.
Avron, Arnon. 1991. Simple consequence relations. *Information and Computation* 92:105–139.
Avron, Arnon. 1994. The method of hypersequents in the proof theory of propositional non-classical logics. In *Logic: From Foundations To Applications*. Oxford University Press, 1–32.
Barrio, Eduardo Alejandro, Federico Pailos, and Damian Szmuc. 2018. Substructural logics, pluralism and collapse. *Synthese* 198(S20): 4991–5007.
Beall, J. C. 2013. LP, K3, FDE, and their 'classical collapse'. *The Review of Symbolic Logic* 6(4): 742–754.
Beall, J.C., and Greg Restall. 2006. *Logical Pluralism*. Oxford University Press.
Belnap, Nuel D. 1962. Tonk, plonk and plink. *Analysis* 22: 130–134.
Belnap, Nuel D. 1982. Display logic. *Journal of Philosophical Logic* 11: 375–417.
Bimbo, K. 2014. *Proof Theory: Sequent Calculi and Related Formalisms*. Taylor & Francis.
Blok, W. J, and Bjarni Jonsson. 2006. Equivalence of consequence operations. *Studia Logica* 83(1-3): 91–110.
Chapman, Peter. 2009. Syntactic conditions for invertibility in sequent calculi. Unpublished manuscript, 2009.
Cobreros, Pablo, Paul Égré, David Ripley, and Robert van Rooij. 2013. Reaching transparent truth. *Mind* 122(488): 841–866.
Cobreros, Pablo, Paul Égré, David Ripley, and Robert van Rooij. 2020. Inferences and metainferences. *Journal of Philosophical Logic* 49(6): 1057–1077.
Czermak, Johannes. A remark on Gentzen's calculus of sequents. 1977. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 18(3):
Di Cosmo, Robert, and Dale Miller. Linear Logic. 2019. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, Summer edition.
Dicher, Bogdan. 2016. A proof-theoretic defence of meaning-invariant logical pluralism. *Mind* 125: 727–757.
Dicher, Bogdan. 2020. Hopeful monsters: A note on multiple conclusions. *Erkenntnis* 85: 77–98.
Dicher, Bogdan, and Francesco Paoli. 2019. ST, LP and tolerant metainferences. In C. Baskent and T. Ferguson, editors, *Graham Priest on Dialetheism and Paraconsistency*, 383–407.
Dicher, Bogdan, and Francesco Paoli. 2021. The original sin of proof-theoretic semantics. *Synthese* 198(1): 615–640.
Došen, Kosta. 1989. Logical constants as punctuation marks. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 30(3): 362–381.
Došen, Kosta. 1993. A historical introduction to substructural logics. In Kosta Dosen and Peter Schroeder-Heister, editors, *Substructural Logics*. Oxford University Press.
Dragalin, Albert Grigorevich. 1987. Mathematical Intuitionism: Introduction to Proof Theory, Volume 67 of Translations of Mathematical Monographs. *American Mathematical Society* 24:
Dummett, Michael. 1991. *The Logical Basis of Metaphysics*. London: Duckworth.
Dunn, Michael J. 1974. A 'Gentzen' system for positive relevant implication. *Journal of Symbolic Logic* 38: 356–357.

Ferrari, Filippo, and Eugenio Orlandelli. 2019. Proof-theoretic pluralism. *Synthese* 198: 4879–4903.
Francez, Nissim. 2015. *Proof-theoretic semantics*. College Publications.
French, Rohan. 2016. Structural reflexivity and the paradoxes of self-reference. *Ergo, an Open Access Journal of Philosophy* 3.
Galatos, Nikolaos, Peter Jipsen, Tomasz Kowalski, and Hiroakira Ono. 2007. *Residuated Lattices: An Algebraic Glimpse at Substructural Logics*. Amsterdam: Elsevier.
Gentzen, Gerhard. 1935. Untersuchungen ¨uber das logische schließen. I, II. *Mathematische Zeitschrift* 39(1): 176–210; 405–431.
Girard, Jean-Yves. 1987. Linear logic. *Theoretical Computer Science* 50: 1–101.
Girard, Jean-Yves, Yves Lafont, and Paul Taylor. 1989. *Proofs and Types*, *Volume* 7 of *Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science*. Cambridge University Press.
Goré, Rajeev. 1998. Substructural logics on display. *Logic Journal of the IGPL* 6(3): 451–604.
Gottwald, Siegfried. 2020. Many-Valued Logic. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, Summer edition.
Gratzl, Norbert, and Eugenio Orlandelli. 2019. Logicality, double-line rules, and modalities. *Studia Logica* 107(1): 85–107.
Haack, Susan. 1996. *Deviant Logic, Fuzzy Logic: Beyond the Formalism*. Cambridge University Press.
Lewis, C. I., and C. H. Langford. 1932. *Symbolic Logic*. New York and London: The Century Co.
Lewis, C. I. 1918. *A Survey of Symbolic Logic*. University of Berkeley Press.
Malinowski, Grzegorz. 1993. *Many-Valued Logics*. Oxford University Press.
Mares, Edwin. 2020. Relevance Logic. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, Winter edition.
Mares, Edwin, and Francesco Paoli. 2014. Logical consequence and the paradoxes. *Journal of Philosophical Logic* 2-3: 439–469.
Mares, Edwin, and Francesco Paoli. 2019. C.I. Lewis, E.J. Nelson, and the modern origins of connexive logic. *Organon F* 26(3):
Mares, Edwin. 2004. *Relevant Logic: A Philosophical Interpretation*. Cambridge University Press.
Mints, G. E. 1976. Cut-elimination theorem for relevant logics. *Journal of Mathematical Sciences* 6(4): 422–428.
Negri, Sara, and Jan von Plato. 2001. *Structural Proof Theory*. Cambridge University Press.
Hitoshi, Omori, and Heinrich Wansing. 2017. 40 years of FDE: An introductory overview. *Studia Logica* 105(6): 1021–1049.
Ono, Hiroakira. 1993. Semantics for substructural logics. In Peter Schroeder-Heister and Kosta Došen, editors, *Substructural Logics*, Oxford University Press, 259–291.
Paoli, Francesco. 2002. *Substructural Logics: A Primer*. Berlin, Heidelberg: Springer.
Paoli, Francesco. 2003. Quine and Slater on paraconsistency and deviance. 32(5): 531–548.
Paoli, Francesco. 2005. The ambiguity of quantifiers. *Philosophical Studies* 124(3): 313–330.
Paoli, Francesco. 2007. Implicational paradoxes and the meaning of logical constants. *Australasian Journal of Philosophy* 85(4): 553–579.
Prawitz, Dag. 1965. *Natural Deduction: A Proof Theoretical Study*. Stockholm: Almqvist and Wiksell.
Přenosil, Adam. 2017. Cut elimination, identity elimination, and interpolation in super-Belnap logics. *Studia Logica* 105(6): 1255–1289.

Priest, Graham. 1979. The logic of paradox. *Journal of Philosophical Logic* 8(1): 219–241.
Prior, Arthur N. 1960. The runabout inference-ticket. *Analysis* 21(2): 38–39.
Quine, Willard van Orman. 1970. *Philosophy of Logic*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
Read, Stephen. 1988. *Relevant Logic: A Philosophical Examination of Inference*. Oxford: Wiley- Blackwell.
Restall, Greg. 2022. *Proofs and models*. Cambridge University Press.
Restall, Greg. 1998. Displaying and deciding substructural logics 1: Logics with contraposition. *The Journal of Philosophical Logic* 27(2): 179–216.
Restall, Greg. 2000. *An Introduction to Substructural Logics*. Routledge.
Restall, Greg. 2014. Pluralism and proofs. *Erkenntnis* 79: 279–291.
Restall, Greg. 2018. Substructural Logics. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, Spring edition.
Restall, Greg. 2019. Generality and existence 1: Quantification and free logic. *Review of Symbolic Logic* 12(1): 1–29.
Schroeder-Heister, Peter. 2018. Proof-Theoretic Semantics. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, Spring edition.
Scott, Dana. 1971. On engendering an illusion of understanding. *The Journal of Philosophy* 68: 787–807.
John, Slaney. 1990. A general logic. *Australasian Journal of Philosophy* 68(1): 74–88.
Alfred, Tarski. 1956. Foundations of the calculus of systems. In *Logic, Semantics, Metamathematics: papers from* 1923 *to* 1938. Oxford: Clarendon Press, 342–383. Originally published in *Fundamenta Mathematicae as* '*Grundzüge der Systemenkalküls Erster Teil*' (25: 503–526, 1935) and '*Grundzüge der Systemenkalküls. Zweiter Teil*' (26: 283–301, 1936).
Tarski, Alfred. 1956. On the concept of logical consequence. *In Logic, Semantics, Metamathematics: papers from* 1923 *to* 1938. Oxford: Clarendon Press, chapter 16, 409–420. Originally published in 1936.
Tennant, Neil. 2017. *Core Logic*. Oxford University Press.
Tennant. Neil. 2022. On the adequacy of a substructural logic for mathematics and science. *The Philosophical Quarterly* 24
Troelstra, A. S. 1992. *Lectures on Linear Logic*. CSLI Publications.
Ungar, A. M. 1992. *Normalization, Cut-elimination, and the Theory of Proofs*. CSLI Publications.
Urbas, Igor. 1996. Dual-intuitionistic logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 37: 440–451.
Wansing, Heinrich. 1998. Translation of hypersequents into display sequents. 6(5): 719–733.
Weir, Alan. 2015. A robust non-transitive logic. *Topoi* 34(1): 1–9.
Williamson, Timothy. 2018. Alternative logics and applied mathematics. *Philosophical Issues* 28(1): 399–424.
Zardini, Elia. 2011. Truth without contra(di)ction. *Review of Symbolic Logic* 4(4): 498-535.
Zardini, Elia. 2021. Substructural approaches to paradox: an introduction to the special issue. *Synthese* 199(S3): 493–525.