Explicação Matemática

Edição de 2020 do

Compêndio em Linha de Problemas de Filosofia Analítica

2018-2021 FCT Project PTDC/FER-FIL/28442/2017

Editado por
Ricardo Santos e Pedro Galvão

ISBN: 978-989-8553-22-5

Centro de Filosofia da Universidade de Lisboa
Alameda da Universidade, Campo Grande, 1600-214 Lisboa

DOI: https://doi.org/10.51427/cfi.2021.0034

Resumo:
Artigo opinativo sobre o estado da arte da explicação matemática. Após uma introdução genérica ao assunto, o artigo divide-se em duas partes. A primeira parte é dedicada à explicação intra-matemática e a segunda é dedicada à explicação extra- matemática. Cada uma destas partes começa por apresentar um conjunto de problemas diversos sobre cada tipo de explicação e, seguidamente, analisam-se modelos relevantes da literatura. A respeito da explicação intra-matemática abordam-se os modelos das demonstrações deformáveis, das saliências matemáticas e da estrutura demonstrativa da indução matemática. A respeito da explicação extra-matemática abordam-se os modelos da modalidade, da abstracção e da dedução.

Palavras-chave:
Abstracção, demonstração, dedução, indução, modalidade.

Abstract:
Opinionated state of the art paper on mathematical explanation. After a general introduction to the subject, the paper is divided into two parts. The first part is dedicated to intra-mathematical explanation and the second is dedicated to extra-mathematical explanation. Each of these parts begins to present a set of diverse problems regarding each type of explanation and, afterwards, it analyses relevant models of the literature. Regarding the intra-mathematical explanation, the models of deformable proofs, mathematical saliences and the demonstrative structure of mathematical induction are addressed. Regarding the extra-mathematical explanation, modal, abstract and deductive models are addressed.

Keywords:
Abstraction, proof, deduction, induction, modal.

Explicação Matemática

DOI: https://doi.org/10.51427/cfi.2021.0034

1 Introdução

Este artigo é sobre o conceito *explicação matemática*. O conceito *explicação matemática* pode referir dois tipos de explicação: explicação intra-matemática e explicação extra-matemática. Aquilo que habitualmente se designa por 'explicação intra-matemática' é respeitante às explicações exclusivamente internas à matemática, nomeadamente, aquelas que ocorrem no âmbito das demonstrações matemáticas.[1] Aquilo que habitualmente se designa por 'explicação extra-matemática' é respeitante às explicações externas à matemática, nomeadamente, as explicações de acontecimentos ou factos no espaço-tempo por intermédio de proposições matemáticas. Por simplicidade, neste artigo farei uso dos acrónimos seguintes: o acrónimo EIM designa a(s) explicação(ões) intra-matemática; o acrónimo EEM designa a(s) explicação(ões) extra-matemática.

Em Castro (2020a) argumentei que uma explicação é uma forma de conhecimento. O conhecimento explicativo é aquele que acrescenta compreensão a um outro conhecimento previamente estabelecido, numa relação entre um *explanans* (plural, *explanantia*) e um *explanandum* (plural, *explananda*). O explanans é um conjunto de proposições que pretende explicar o *explanandum*.[2] Esta relação, entre *explanans* e *explanandum*, se verdadeira, constitui-se em conhecimento explicativo. À luz deste enquadramento, as EIM são inteiramente constituídas por proposições matemáticas, ou seja, os *explanantia* e os *explananda* correspondentes são constituídos unicamente por proposições matemáticas. A composição das EEM é

1 Embora também se possam analisar casos particulares de explicações matemáticas que não são demonstrações (por exemplo, o uso de diagramas), neste artigo irei apenas analisar o conceito *explicação matemática* no âmbito da demonstração matemática.

2 Concepções pragmatistas relativas à explicação defendem que se deve acrescentar um terceiro elemento ao par-ordenado <*explanans*, *explanandum*>, designadamente, o sujeito ou o contexto, obtendo-se assim um triplo-ordenado <*explanans*, *explanandum*, sujeito/contexto>.

Publicado pela primeira vez em 2020

ligeiramente diferente. Os *explananda* das EEM são factos ou acontecimentos empíricos; os *explanantia* são constituídos por proposições matemáticas e podem-se acrescentar outras proposições de natureza diversa como leis da natureza ou condições empíricas.

Famosamente, Salmon (1989) apresenta uma bibliografia de cerca de 25 páginas a respeito de quatro décadas de investigação em torno da explicação científica, dos anos 50 até aos anos 90, do século passado. Caso desejássemos estabelecer uma bibliografia análoga para a explicação matemática, a listagem bibliográfica seria muito diferente da listagem estabelecida por Salmon, quer na quantidade, quer na cronologia. A explicação matemática é um assunto que apenas recentemente começou a ser estudado.[3] A propósito das EIM, a discussão surge no final dos anos 70 com um artigo de Steiner (1978a). Até ao final do século, a bibliografia sobre o assunto talvez se resuma a um punhado de artigos. Somente na transição do século é que o assunto foi aprofundado, maioritariamente por intermédio de académicos ligados ao movimento chamado de *filosofia da prática matemática*. As EEM seguiram um desenvolvimento semelhante. A discussão começa com um outro artigo de Steiner (1978b) e a transição do século trouxe um alargamento da discussão.

Se é relativamente pacífico na literatura que as explicações científicas são um propósito da actividade científica, que importa epistemicamente definir e caracterizar, o mesmo não ocorre a respeito da explicação matemática. No século passado, a comunidade filosófica foi insensível ao assunto da explicação matemática, quer sejam EIM, quer sejam EEM.

A insensibilidade em torno das EIM parece-me ser uma consequência de como o assunto da explicação em ciência foi originalmente abordado na literatura filosófica. Exceptuando uma ou outra referência avulsa do passado sobre a explicação científica, contemporaneamente, o artigo de Carl Hempel e Paul Oppenheim, (1948), 'Studies in the Logic of Explanation', é a primeira referência exaustiva sobre o assunto. Este artigou dominou durante décadas a discussão. O modelo aí proposto para a explicação científica, o chamado *modelo*

3 As referências antigas apenas têm uma ou outra passagem ligeira sobre o assunto. Por exemplo, Aristóteles (1984, Posterior Analytics, 79a 2-3). Ver também Mancosu (1996) para uma análise histórica sobre o século XVII.

Dedutivo-Nomológico (ou, abreviadamente, *modelo DN*), defende que as explicações científicas são argumentos dedutivos constituídos por leis da natureza e condições iniciais no *explanans*, a partir das quais se deduz o *explanandum*. Ora, olhando para a matemática, os filósofos nada mais viam que uma ciência exclusivamente dedutiva, onde proposições matemáticas finais (e.g. teoremas) se deduziam de proposições matemáticas primeiras (e.g. axiomas). O cilindro conceptual *demonstração* parecia eliminar qualquer tentativa de identificação de subespécies conceptuais na paisagem da demonstração matemática. Portanto, à primeira vista, a matemática não era susceptível de suscitar nenhum interesse particular para alimentar o tópico da explicação científica, porque, à luz do modelo DN, todas as demonstrações matemáticas seriam demonstrações explicativas *simpliciter*.

No entanto, a partir do momento em que o modelo DN começou a ser desafiado e concepções mais pragmáticas sobre a explicação científica entraram em cena (van Fraassen 1980), também se começou a dar mais atenção ao repositório de demonstrações matemáticas que insistiam em demonstrar proposições já anteriormente estabelecidas.[4] Esta insistência não podia continuar a ser vista como uma mera recriação matemática sem consequências epistémicas. Naturalmente, os epistemólogos teriam de começar a direccionar as baterias nessa direcção.

A insensibilidade a respeito das EEM também é herdeira dos desenvolvimentos da explicação científica, mas com contornos ligeiramente diferentes. No século passado, as décadas de investigação sobre o tópico da explicação científica muniram os seus praticantes com propósitos reducionistas a respeito das EEM. Em virtude das EEM serem explicações acerca de acontecimentos empíricos, alegava-se que as EEM se reduziam as explicações científicas ordinárias. Por exemplo, para Hempel (1964) a matemática funcionava apenas como um 'extractor de sumo' de informação já contida nas leis da natureza e, por isso, presumia-se que o modelo DN seria suficiente para acomodar as EEM. Para David Lewis (1986: 217), por sua vez,

4 Veja-se, por exemplo, a demonstração alternativa de Polya (1968: 147) do teorema seguinte (que já se encontrava demonstrado): se os termos de uma sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ são números reais não-negativos, nenhum deles igual a zero, então $\sum_{n=1}^{\infty} (a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)^{1/n} < e \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

toda a explicação era causal, no sentido em que uma explicação de um acontecimento consiste em fornecer informação sobre a história causal desse acontecimento. Dada a inclusão de proposições abstractas nas EEM, à luz da teoria causal da explicação de Lewis, automaticamente, as EEM jamais podiam ser explicações científicas.[5]

Recentemente, contudo, a comunidade filosófica começou a notar que determinados *explanantia* contêm, explicitamente, algumas proposições matemáticas. Essas proposições, na verdade, desempenham um papel relevante na explicação. O papel relevante estabelece-se na seguinte condicional: se essas proposições matemáticas forem subtraídas aos *explanantia*, não parece que os respectivos *explananda* se continuem a deduzir com a mesma robustez epistémica.

Há também uma diferença importante a respeito da exemplificação de EIM e EEM, que permite uma melhor compreensão do desenvolvimento do estado da arte. Na literatura sobre as EIM não há um consenso sobre o que sejam exemplares de demonstrações explicativas/não-explicativas. Tanto quanto sei, não existe na literatura filosófica (ou matemática) um único exemplo de uma demonstração que seja consensualmente considerada como explicativa/não-explicativa. Por exemplo, a respeito das demonstrações baseadas na indução matemática, há autores que consideram (mas sem argumentar) que este tipo de demonstração é explicativo (Kitcher 1975; Brown 1997) e outros que não (D'Alessandro 2019).[6]

Em contraste, existe um consenso a respeito de alguns exemplares de EEM. Os exemplos seguintes de EEM, e que analisaremos mais à frente no artigo, são bem conhecidos na literatura: o impossível atravessamento das sete pontes de Königsberg numa só caminhada; os ciclos de vida com duração prima das cigarras da américa do Norte que minimizam a intersecção com predadores;

5 Ver também Salmon (1984: 132).

6 As afirmações são as seguintes. 'Suponhamos que demonstro um teorema por indução… dificilmente podemos negar que esta é uma demonstração genuína' (Kitcher 1975: 265). 'Suspeito que a indução (…) mais do que qualquer outra característica, melhor caracteriza os números naturais. [Este tipo de demonstração] é mais explicativa' (Brown 1997: 177). 'A demonstração é certamente sólida. Mas parece que não explica o resultado' (D'Alessandro 2019: 2).

os ângulos específicos de películas de sabão que se originam em estruturas geométricas particulares. Qualquer novo modelo para as EEM está obrigado a posicionar-se relativamente a este tipo de exemplos. Obviamente, escusado será dizer que estes exemplos não deixam de ser desafiados por atiradores furtivos. Mas para a generalidade dos especialistas, estes desafios não são suficientes para questionar a validade dos exemplos de EEM em questão. São tidos como exemplos recalcitrantes de EEM.

A intuição, enquanto capacidade sensível para a imaginação, parece ser o pano de fundo necessário para gerar consensos persistentes no tempo. Por exemplo, na explicação científica ordinária há intuições comuns que conduziram a um imenso repositório de contra-exemplos aos diferentes modelos da explicação científica. Estes contra-exemplos são relevantes, porque as intuições em que se baseiam são comuns à comunidade de especialistas e ao senso comum em geral. Ilustrativamente, um contra- exemplo clássico ao modelo DN, conhecido por *mastro/sombra*, é fundamentado na argumentação seguinte: intuitivamente, as leis da geometria podem explicar o comprimento da sombra do mastro, a partir da sua altura; porém, intuitivamente, o comprimento da sombra do mastro e as leis da geometria não parece que expliquem a altura do mastro. O rasto histórico na literatura deste contra-exemplo mostra que as intuições que o fundamentam são partilhadas pela generalidade das pessoas. A primeira versão deste contra-exemplo formulou-se em 1966 por Bromberger (1966: 92–93) e, até aos dias de hoje, continuam a aparecer na literatura novas versões deste contra-exemplo clássico (e.g. van Fraassen (1980: 132–134)). Qualquer modelo para a explicação científica está obrigado a acomodar este contra-exemplo ao modelo DN.

Tal como acontece na explicação científica ordinária, nas EEM há intuições comuns donde brotam exemplares consensuais de EEM. Este facto alimenta a tese, ainda que controversa, de que as EEM são da mesma natureza que as explicações científicas ordinárias. Formalmente, nas EEM os *explanantia* são constituídos por proposições matemáticas e abertos a outras proposições empíricas; o *explanandum* é, necessariamente, um facto empírico. Por outras palavras, ainda que as EEM contenham proposições abstractas, parece que as proposições empíricas do *explanans*, acabam por desempenhar um papel determinante para uma paridade entre as EEM as explicações científicas ordinárias.

Nas EIM, por sua vez, não existem intuições comuns sobre as demonstrações matemáticas. Ou seja, os seres humanos parecem ter intuições conflituosas sobre o alegado carácter explicativo de uma demonstração matemática particular. Não há tal coisa como, digamos, um senso comum alargado que possa servir de fonte para intuições comuns. A matemática expressa-se por intermédio de uma linguagem formal e abstracta. Somente após vários anos de ensino, e de ensino diversificado, na forma e nos conteúdos, os seres humanos estão capacitados para compreender a generalidade das demonstrações matemáticas, ainda que as mesmas sejam elementares. Saber se há alguma relação entre o ensino diversificado da matemática, o carácter formal e abstracto da matemática e a ausência de uma partilha de intuições sobre o assunto é uma investigação que não cai no âmbito deste artigo e deve ser deixada à psicologia.[7]

Este artigo é constituído por duas partes: a primeira parte é dedicada à explicação intra-matemática e a segunda é dedicada à explicação extra-matemática. As duas partes são independentes e, assim, podem ser lidas separadamente. Em cada uma destas partes começo por apresentar alguns problemas que estas explicações enfrentam e, num segundo momento, analiso criticamente modelos relevantes encontrados na literatura para cada uma das explicações.

2 Explicação intra-matemática

Na literatura em torno das EIM identificam-se duas linhas de investigação. Por um lado, há uma linha de investigação tradicional, baseada na clarificação e análise conceptual teórica, que procura estabelecer modelos ou caracterizações conceptuais para a explicação matemática. Por outro lado, há uma linha de investigação não-tradicional, baseada na prática matemática, inserida

7 Poincaré (1970: cap. 1) também alimenta esta minha especulação sobre o assunto. Para ele há dois tipos de mentes matemáticas: as intuicionistas e as logicistas. As primeiras procedem por geometria, as segundas procedem por análise. Ele dá vários exemplos de matemáticos famosos com mentes diferentes (Klein, Weierstrass, Riemann, Hermite, Bertrand, etc.). Observa ainda que estas características também existem nos estudantes de matemática.

num movimento académico contemporâneo chamado de *filosofia da prática matemática*. Os académicos desse movimento, em geral, são fiéis a um credo naturalista, conhecido por *naturalismo matemático*. Muito simplificadamente, o naturalismo matemático defende uma primazia da matemática face à filosofia – *matemática primeiro*. Esta linha de investigação debruça-se assim fortemente sobre uma análise concreta da prática matemática, maioritariamente segundo os seus aspectos técnicos, mas também invocando aspectos sociológicos ou psicológicos a respeito dos seus praticantes.[8]

Neste artigo, vou seguir a linha de investigação tradicional e manter-me afastado da linha de investigação *matemática primeiro*. Na próxima subsecção argumento por que razão não sigo a linha de investigação da filosofia da prática matemática. Depois analiso dois modelos para as EIM que me parecem relevantes na literatura: o modelo das deformações de Steiner e o modelo das saliências matemáticas de Lange. Na última subsecção, analiso argumentos a favor e contra o alegado carácter explicativo das demonstrações por indução matemática.[9]

2.1 *Metodologia*

A ausência de exemplares consensuais de EIM, anteriormente referida, é em grande medida responsável pelo problema em torno da metodologia para o estudo das EIM. Dado que os modelos propostos para as EIM não podem ser corroborados, desafiados ou contrastados por intermédio desses desejáveis exemplares consensuais, este vazio de exemplificação torna premente a questão sobre qual será a melhor metodologia para estudar as EIM.[10]

A linha de investigação que se alimenta na prática matemática introduziu na literatura um confronto metodológico, entre uma

8 Para uma defesa do naturalismo matemático, ver Maddy (1997; 2005; 2007).

9 Inevitavelmente, um artigo sobre demonstrações matemáticas tem de incluir demonstrações matemáticas no seu conteúdo. Ou seja, há aspectos técnicos que são incontornáveis neste tipo de artigos. Em todo o caso, escolhi demonstrações matemáticas curtas e que não comportam demasiados tecnicismos.

10 Para uma análise mais exaustiva de problemas para as EIM, ver Castro (2017).

metodologia de 'baixo para cima' *versus* uma metodologia de 'cima para baixo'. A metodologia de 'baixo para cima' estabelece modelos para a EIM partindo de exemplares concretos da prática matemática. A metodologia de 'cima para baixo' é uma metodologia inversa. Primeiro, estabelece modelos e, posteriormente, testa esses modelos contra a prática matemática.

A linha de investigação da filosofia da prática matemática defende que as EIM devem ser estudadas por uma metodologia de 'baixo para cima'. Por sua vez, opõe-se à metodologia de 'cima para baixo', considerando que esta metodologia é inapropriadamente derivada de modelos da explicação científica ordinária. Esta linha de investigação observa ainda que quando, excepcionalmente, a metodologia de 'cima para baixo' estabelece modelos para as EIM não derivados dos modelos existentes para a explicação científica ordinária (e.g. ver modelo abaixo das deformações de Steiner), podem surgir resultados indesejáveis. Nomeadamente, algumas demonstrações 'consideradas como explicativas pelos matemáticos' podem acabar por ser etiquetadas como demonstrações não-explicativas, em virtude de a modelação de 'cima para baixo' não partir da prática matemática. À luz do credo do naturalismo matemático, *matemática primeiro*, essa consequência é uma evidência de que a metodologia de 'cima para baixo' não é uma boa metodologia para analisar as EIM (Mancosu e Hafner 2006: 221).

Alguns académicos da filosofia da prática matemática partem assim do pressuposto que o problema a respeito da ausência de exemplares consensuais de EIM é um problema de fácil resolução: o problema resolve-se directamente por uma metodologia de 'baixo para cima'. A prática matemática é que determina se uma demonstração é ou não explicativa. Por exemplo, Mancosu e Hafner (2006: 218) citam alguns matemáticos que afirmam a existência de demonstrações explicativas; Mancosu (2001: 98–100) apresenta três demonstrações de Georges Bouligand (1933), a propósito do teorema de Pitágoras, defendendo que uma delas é explicativa e as outras não. A partir destes exemplos, estes autores defendem a existência de EIM.

Esta abordagem metodológica, baseada na prática matemática, para tentar resolver o problema da ausência de exemplares consensuais de EIM é uma quimera. O argumento apresentado por estes filósofos para defender a existência de EIM é um argumento falacioso de autoridade, baseado na opinião que os matemáticos têm a respeito dessas demonstrações. Ou seja, a posição filosófica é simplesmente determinada por um alinhamento à posição de um matemático particular.

A prática matemática não resolve o problema da ausência de exemplares consensuais de EIM, nem sequer é aconselhável tentar resolver esse problema por este meio. Primeiro, não existem opiniões consensuais entre matemáticos, ainda que as mesmas sejam opiniões estritamente científicas. Os exemplos que estes filósofos apresentam na literatura, a respeito das EIM, são exemplos particulares avançados por matemáticos particulares. Tanto quanto sei, em parte alguma é 'ponto assente' que tais demonstrações são tidas pela comunidade matemática em geral como sendo demonstrações explicativas. Por exemplo, Mancosu e Hafner afirmam que '*alguns* matemáticos (...) consideram que as demonstrações por indução são paradigmas de demonstrações não-explicativas' (Mancosu e Hafner 2006: 237, itálico meu); em contraste, Poincaré (1968: 38) observa que a indução matemática é um raciocínio matemático *par excellence*. Segundo, ainda que houvesse tal consenso entre os matemáticos, questões epistémicas não são determinadas por opiniões. Por outras palavras, o que os matemáticos *qua* matemáticos escrevem sobre o assunto não implica que bastaria alinhar a posição filosófica à posição da prática matemática para se resolver o problema da ausência de exemplares consensuais. Os argumentos filosóficos são os instrumentos adequados para alcançar uma decisão acerca deste assunto. Os filósofos estão obrigados a argumentar de forma independente a propósito da explicação matemática, ainda que não existam exemplares consensuais de EIM.

Este confronto de metodologias – 'baixo para cima' *vs.* 'cima para baixo' – não me parece um bom ponto de partida, nem sequer enquadra adequadamente a investigação que tem vindo a lume na literatura. Contrariamente ao que presume tal confronto, a primeira linha de investigação que referi acima, uma linha tradicional, conceptual e teórica, não é necessariamente uma linha de investigação metodológica de 'cima para baixo'. Por exemplo, apesar de adoptar uma abordagem conceptual original a respeito das EIM, Steiner começa por analisar casos concretos da prática matemática e respeitar a ideia de que existem demonstrações explicativas, pois '[o]s matemáticos correntemente distinguem demonstrações que meramente provam de demonstrações que explicam' (Steiner 1978a: 136). Mais recentemente, Joachim Frans e Erik Weber (2014) explicitamente opõem-se a este confronto de metodologias, considerando que estas metodologias não são metodologias 'rivais' (Frans e Weber 2014: 232). Em contraste, propõem um modelo mecanicista para as EIM, complementado com uma análise de exemplos concretos de demonstrações matemáticas. Na minha opinião, as EIM são um assunto complexo e requer algum cuidado na sua abordagem.

Hipoteticamente, as EIM são subespécies conceptuais na paisagem do conceito *demonstração matemática*. Neste sentido, há que analisar demonstrações matemáticas diversas. É sensato começar por analisar demonstrações que justificam uma mesma proposição matemática.[11] Em princípio, será mais fácil comparar demonstrações que inferem uma mesma proposição do que comparar demonstrações que inferem proposições diversas. Quais são as diferenças entre as demonstrações? Quais são as regras lógicas seguidas ao longo dos passos das demonstrações? As diferenças identificadas estabelecem alguma conexão com a noção de explicação? A partir destas questões tenta-se estabelecer um modelo que enquadre as respostas possíveis sobre o assunto. Nesta aproximação ao problema, o filósofo é um zoólogo que procura um enquadramento conceptual de uma nova subespécie conceptual na paisagem. Esta é a nova lente de observação conceptual: ainda que uma proposição *p* se derive logicamente de um conjunto de proposições antecedentes, essa demonstração poderá fornecer pouco entendimento *por que razão* a proposição *p* é o caso.[12]

No início do século anterior houve matemáticos que começaram a duvidar da própria estrutura lógica de certas demonstrações. Foi criada uma nova lógica, chamada de *intuicionismo*, e uma nova matemática associada, chamada de *matemática intuicionista*. Para os intuicionistas, algumas regras lógicas clássicas como, por exemplo, a chamada

11 Esta estratégia é seguida por Lange (2014: 487).

12 Ver a parte introdutória do artigo 'Explicação Científica' (secção 2.1) para uma discussão sobre o significado e a terminologia a respeito do termo 'explicação'. O que é dito no âmbito desse artigo estende-se à explicação matemática. Por exemplo, não nos interessa analisar o termo 'explicação' nos contextos seguintes: 'explicar como se multiplicam duas matrizes'; 'explicar quando temos de dividir dois polinómios'; 'explicar que o integral de x é $x^2/2+C$'; 'explicar *quais* os termos a cortar numa operação aritmética'; etc.

reductio ad absurdum, não asseguram que a verdade das premissas se transmita às conclusões derivadas.[13] Sendo o conceito *explicação* mais fraco que o conceito *derivação*, então *a fortiori* a própria estrutura lógica das demonstrações matemáticas deve ser objecto de investigação. Mais à frente, na subsecção 2.4, veremos como essa discussão tem sido feita para as demonstrações por indução matemática.[14]

Na minha análise a respeito das EIM vou-me manter afastado da linha de investigação da filosofia da prática matemática, bem como de posições *ad hoc* sobre as EIM.[15] Primeiro, parece-me pouco fecundo discutir demonstrações sem qualquer estrutura ou modelo conceptual prévio, que enquadre minimamente aquilo que seja uma demonstração explicativa. Segundo, dada a ausência de exemplares consensuais de EIM, parece-me incorrecta uma apologia da metodologia de 'baixo para cima' fundamentada no *dogma* segundo o qual existem exemplares de EIM, porque há matemáticos que afirmam que existem exemplares de EIM.

2.2 *Deformações*

Mark Steiner (1978a) defende que há demonstrações que podem ser classificadas de explicativas. A sua proposta é rebuscada e para a entendermos melhor temos de começar por introduzir algumas noções.

Primeira, uma *propriedade caracterizadora* é uma propriedade essencial que a proposição matemática a ser demonstrada possui. Esta propriedade pode ser uma entidade ou uma estrutura que é referida na proposição a ser demonstrada. Segunda, esta propriedade caracterizadora tem de pertencer a uma *família de entidades ou estruturas* (esta noção de família não é definida por Steiner). Terceiro, a demonstração da proposição faz referência à propriedade caracterizadora

13 Em particular, rejeitam que se possa inferir p a partir de $\neg p \vdash \bot$.

14 Tanto quanto sei, a análise de EIM no domínio da matemática intuicionista é um terreno completamente novo a explorar.

15 Por exemplo, Mark Colyvan considera que não é explicativa uma demonstração por *reductio ad absurdum* do teorema segundo o qual existe uma infinidade de números primos. O argumento que ele apresenta para sustentar a sua posição é uma tautologia: 'isto não nos ajuda a ver *por que razão* há uma infinidade de primos' (Colyvan 2012: 90).

e depende dessa propriedade. Por outras palavras, se numa demonstração particular trocarmos a entidade inicial, por uma outra entidade, ainda que pertencente à mesma família, o teorema inicial já não se consegue inferir por intermédio dessa demonstração. Finalmente, uma demonstração é explicativa se puder ser *deformada*, sendo a deformação uma relação unívoca entre um conjunto de demonstrações e um conjunto de teoremas respectivamente demonstrados.

Clarificando. Uma demonstração particular de um teorema, por si só, não pode ser automaticamente classificada de explicativa. Uma demonstração apenas pode ser classificada de explicativa se pertencer a um conjunto de demonstrações 'deformáveis'. Este conjunto de demonstrações é uma relação unívoca. O domínio dessa relação é constituído por um conjunto de proposições que referem entidades ou estruturas (objectos) de uma mesma família. O contra-domínio dessa relação é o conjunto de teoremas que são demonstrados pelas proposições respectivas do domínio. Formalmente:

> Seja f uma família de objectos, $f = \{o_1,..., o_n\}$.
> Seja d_1 uma demonstração do teorema t_1, tal que o_1 pertence a t_1 e d_1 refere o_1.
> Seja d_2 uma demonstração do teorema t_2, tal que o_2 pertence a t_2 e d_2 refere o_2.
> (...)
> Seja d_n uma demonstração do teorema t_n, tal que o_n pertence a t_n e d_n refere o_n.
> Uma demonstração explicativa é uma relação unívoca entre d_i e t_i, $i = \{1,..., n\}$.

Ilustremos esta concepção pelo exemplo seguinte. Consideremos o teorema 1: o produto de três números naturais não-nulos consecutivos é divisível por seis. Consideremos uma demonstração 1 do teorema 1.[16]

Teorema 1:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ n \geq 1,\ \exists_a : n(n+1)(n+2)=6a$$

Demonstração 1:

16 Estes teoremas e demonstrações são adaptados de Lange (2014).

> Para quaisquer três números naturais não-nulos consecutivos, pelo menos, um deles é divisível por 2 (ou seja, pelo menos, um deles é par) e um, e um só, é divisível por 3. Logo o seu produto é divisível por 3*2=6.

Consideremos o teorema 2: o produto de quatro números naturais não-nulos consecutivos é divisível por vinte e quatro. Consideremos uma demonstração 2 do teorema 2.

> Teorema 2:
>
> $\forall_{n \in \mathbb{N}}\ n \geq 1,\ \exists_a : n(n+1)(n+2)(n+3)=24a$
>
> Demonstração 2:
>
> Para quaisquer quatro números naturais não-nulos consecutivos, pelo menos, um deles é divisível por 2, outro, distinto do anterior, é divisível por 3 e um outro, distinto dos anteriores, é divisível por 4. Logo, o seu produto é divisível por 4*3*2=24.

Abstractamente, a propriedade caracterizadora destes teoremas é: x é produto de y números naturais não-nulos consecutivos e x é divisível por z. Trocando os objectos respectivos às variáveis x, y e z, obtêm-se um conjunto de teoremas diferentes que são demonstrados por proposições diferentes. Ou seja, 'deformações' nos teoremas implicam 'deformações' nas demonstrações.

À luz do modelo de Steiner, uma demonstração apenas é explicativa se fizer parte de um conjunto de demonstrações 'deformáveis'. Este modelo não é assim consonante com a ideia de que uma explicação deve ser explicativa em virtude dos detalhes que a própria demonstração encerra (Lange 2014: 523). Por exemplo, Resnik e Kushner (1987) apresentam uma demonstração do teorema do valor intermédio.[17] Esta demonstração não pode ser deformada com vista a estabelecer novos resultados, porque não é evidente qual seja a propriedade caracterizadora que se possa invocar no teorema. Especulativamente, reclamam que esta demonstração é explicativa por si própria.

No processo demonstrativo em matemática é corrente que se invoquem teoremas prévios ou outras proposições matemáticas que auxiliam

17 Teorema do valor intermédio: se uma função f é contínua num intervalo $[a, b]$ e se $f(a) < c < f(b)$, então $\exists_{x \in [a,b]}\ f(x) = c$.

o processo demonstrativo. Abstractamente, uma demonstração A do teorema x, pode depender de um outro teorema z (bem como de outras proposições matemáticas prévias). Por exemplo, uma demonstração conhecida do teorema $\sqrt{2}$ *é irracional*, invoca o teorema fundamental da aritmética num dos passos da demonstração.

Teorema: $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração (por redução ao absurdo).

Suposição: $\sqrt{2}$ é racional

(1) $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, onde a fracção é reduzida, ou seja, nenhum número pode dividir, simultaneamente, a e b.

(2) Então $a^2 = 2b^2$.

(3) Teorema fundamental da aritmética: todos os números inteiros positivos podem ser escritos, de forma única, como produto de primos.

(4) De (3) segue-se: se escrevermos a^2 e $2b^2$ como produto de primos, a quantidade de 2's será igual para a^2 e $2b^2$.

(5) A factorização de cada termo, a^2 e b^2, tem uma quantidade par de 2's (em virtude de estarem ao quadrado).

(6) $2b^2$ tem uma quantidade ímpar de 2's.

(7) (6) contradiz (4).

(8) Logo, $\sqrt{2}$ é irracional.

Steiner argumenta que esta demonstração é explicativa porque a mesma está conforme ao seu modelo. Substituindo 2 por outros primos, 3, 5, 7, etc., a estrutura da demonstração segue os mesmos passos. Ou seja, deformando a demonstração, mas mantendo a sua estrutura, obtemos teoremas igualmente deformados. Contudo, Resnik e Kushner (1987) observaram que a demonstração anterior depende do teorema fundamental da aritmética. Eles reclamam que as demonstrações que conhecem do teorema fundamental da aritmética não são explicativas, no sentido em que é estabelecido no modelo de Steiner. Portanto, eles questionam como pode a demonstração acima ser explicativa se a demonstração inclui um teorema cujas demonstrações conhecidas desse teorema não são elas próprias explicativas.

2.3 *Saliências*

Marc Lange (2014) argumenta que apenas são susceptíveis demonstrações explicativas de proposições matemáticas que contenham saliências matemáticas evidentes. São saliências matemáticas propriedades genéricas como simetria, unidade ou simplicidade.[18] Uma demonstração explicativa é uma demonstração que, após identificar a respectiva saliência na proposição a demonstrar, identifica e explora essa mesma saliência em proposições antecedentes (*setup*), a partir da qual se deriva a proposição a demonstrar.

A respeito da *simetria* consideremos, por exemplo, o teorema d'Alembert:

> Teorema d'Alembert:
> Se o número complexo $z = a + bi$ (onde a e b são números reais) é uma solução de $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0 = 0$ (onde a_i são números reais), então o número complexo conjugado $\overline{z} = a - bi$ támbém é uma solução da mesma equação.

18 A propósito da simplicidade, o exemplo matemático discutido por Lange é muito longo e tenho de o deixar de parte. Neste artigo analisarei apenas as características de simetria e unidade. Outra característica saliente que Lange refere, mas menos comum, é a *elasticidade* de um resultado.

Demonstração:

Tem de se demonstrar que $\overline{z}^{n} + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$.

Sabendo que $\overline{z}\,\overline{w} = \overline{zw}$. Em particular, $\overline{z}^{2} = \overline{z}\,\overline{z} = \overline{zz} = \overline{z^2}$.

Então: $\overline{z}^{n} + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + \ldots + a_0 = \overline{z^n} + a_{n-1}\overline{z^{n-1}} + \ldots + a_0$.

Sabendo que $\overline{z} + \overline{w} = \overline{z+w}$.

Então: $\overline{z^n} + a_{n-1}\overline{z^{n-1}} + \ldots + a_0 = \overline{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0}$.

Por hipótese: $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$.

$\overline{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0} = \overline{0} = 0$.

Lange considera que esta demonstração é uma demonstração por 'força bruta' e que, em geral, as demonstrações por força bruta não são explicativas, porque fornecem pouco entendimento. Sinteticamente, nesta demonstração partimos da expressão do lado esquerdo da proposição a demonstrar, $\overline{z}^{n} + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + \ldots + a_0$, no 'meio do caminho' utilizamos a hipótese $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ e, finalmente, obtemos a expressão do lado direito da proposição a demonstrar, isto é, 'zero'.

O teorema d'Alembert tem uma saliência simétrica: as soluções não-reais da equação ocorrem aos pares ($a + bi, a - bi$), onde, precisamente, a simetria consiste na troca de i por $-i$. Geometricamente, no plano de Argand estas soluções são simétricas relativamente ao eixo real. O eixo é como se fosse um espelho divisório. Uma demonstração explicativa deste teorema será assim uma demonstração que explora esta mesma simetria em proposições antecedentes que implicam o teorema d'Alembert. Lange avança a 'demonstração' alternativa seguinte:

> A explicação necessária é de que $-i$ poderia desempenhar exactamente os mesmos papéis nos axiomas da aritmética complexa que i desempenha. Cada um tem exactamente a mesma definição: define-se exaustivamente como sendo tal que o seu quadrado é

> igual a -1. Nada há nada mais para *i* (e para -*i*) além dessa caracterização. (...) O que os axiomas da aritmética complexa estabelecem a respeito de um também pode ser estabelecido a respeito do outro. Dado que os axiomas se mantêm verdadeiros substituindo *i* por -*i*, o mesmo ocorre com os teoremas (...) A simetria expressa pelo teorema de d'Alembert é, portanto, fundamentada na mesma simetria que ocorre nos axiomas. (Lange 2014: 498–499)

A 'demonstração' alternativa de Lange apenas dá uma pista para o que seria, efectivamente, uma demonstração alternativa.[19] Ainda assim mantém-se intocável a ideia de Lange a propósito do que será uma demonstração explicativa do teorema d'Alembert: explorar a simetria do teorema d'Alembert em proposições antecedentes e, partindo dessa simetria, derivar o próprio teorema.[20]

A respeito da *unidade* consideremos novamente o teorema segundo o qual o produto de três números naturais não-nulos consecutivos é divisível por seis. Consideremos uma demonstração por indução matemática desse teorema:

Teorema:

$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ n \geq 1,\ \exists_a : n(n+1)(n+2)=6a$

Demonstração (por indução):
Seja $P(n)$: $n(n+1)(n+2) = 6a$
Caso base: $P(1) = 1*2*3* = 6a, 6a = 6, a = 1$

Passo indutivo: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

19 Concretamente, será necessário recorrer a formalismo matemático para demonstrar que 'O que os axiomas da aritmética complexa afirmam a respeito de um também pode ser afirmado a respeito do outro'; 'os axiomas mantêm-se verdadeiros substituindo de *i* por -*i*', e, finalmente, é necessário deduzir efectivamente o teorema d'Alembert dos axiomas da análise complexa. Apenas procedendo deste modo obteríamos uma demonstração completa alternativa.

20 Um outro exemplo explorado por Lange é a demonstração de Lagrange das soluções da equação cúbica: $x^3 + nx + p = 0$.

> Mostrar que $P(n+1)$: $(n+1)(n+2)(n+3) = 6a$
> $(n+1)(n+2)(n+3) = n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)$
> Por hipótese: o primeiro termo da soma, $n(n+1)(n+2)$, é divisível por 6.
> O segundo termo da soma, $3(n+1)(n+2)$, é divisível por 3 e por 2. É divisível por 3, porque o termo está multiplicado por 3; é divisível por 2, porque a multiplicação, $(n+1)(n+2)$, multiplica um número par e um número ímpar, e todo o número par é divisível por 2. Consequentemente, o segundo termo da soma, $3(n+1)(n+2)$, é divisível por 6.
> Ambos os termos da soma são divisíveis por 6. A soma de dois termos divisíveis por 6 é também divisível por 6. $P(n+1)$: $(n+1)(n+2)(n+3) = 6a$

Lange considera que esta demonstração não é explicativa, porque as demonstrações por indução matemática não são explicativas (Lange 2009) (ver secção seguinte). Contrariamente, Lange considera que uma demonstração alternativa e explicativa é a seguinte:

> Para quaisquer três números naturais não-nulos consecutivos, pelo menos, um deles é divisível por 2 (ou seja, pelo menos, um deles é par) e um, e um só, é divisível por 3. Logo o seu produto é divisível por $3*2 = 6$.

Contrariamente à demonstração por indução matemática, esta demonstração identifica a propriedade comum a todos os três números naturais consecutivos, a saber: *pelo menos, um deles é divisível por 2 e um, e um só, é divisível por 3*. Esta propriedade unifica todos esses números e permite demonstrar o resultado do teorema (os números em questão são divisíveis por 6).

A crítica que tenho a apontar à proposta de Lange é de a mesma enraizar-se na ideia pragmatista, segundo a qual apenas procuramos explicações científicas para *explananda* que sejam, digamos, perplexidades (Salmon 1989: 127). Ora, embora *simetria*, *unidade* e *simplicidade* sejam noções enquadráveis objectivamente, a verdade é que elas são introduzidas por Lange como entidades psicológicas que importa clarificar por intermédio de demonstrações que exploram em posições antecedentes essas mesmas propriedades respectivas.[21] Por outras palavras, a psicologia é o fundamento para a ideia segundo a qual uma condição necessária, mas não suficiente, para uma proposição ser demonstrável, por intermédio de uma demonstração explicativa, é essa proposição ter uma saliência.

Este carácter psicologista da proposta de Lange é evidente nas passagens seguintes: 'a nossa *curiosidade* foi inicialmente levantada pela simetria' (Lange 2014: 496); 'a simetria do resultado é particularmente *surpreendente*' (Lange 2014: 497); '[i]sso [resultado matemático] é *notável*' (Lange 2014: 4492); '[u]m resultado especialmente simples tipicamente *grita* por uma demonstração' (Lange 2014: 513–514). Um anti-psicologista está aberto à ideia segundo a qual propriedades objectivas podem ser um caminho para a distinção entre demonstrações explicativas e não-explicativas, mas rejeita a ideia segundo a qual escolhemos essas propriedades e não outras, porque tais propriedades despertam sentimentos como curiosidade ou perplexidade.

2.4 *Indução matemática*

Uma demonstração por indução matemática é uma demonstração que tem a estrutura seguinte, que designarei de *indução-1*:

<u>Indução-1</u>
Seja uma propriedade P:
1) Caso base: $P(1)$
2) Passo indutivo: $\forall_{k \in \mathbb{N}}\, P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Conclusão: $\forall_{n \in \mathbb{N}}\, P(n)$

Lange (2009) argumenta que, em geral, as demonstrações por indução não são explicativas. Para tal, Lange propõe uma estrutura indutiva alternativa, que designarei de *indução-5*. O argumento de Lange consiste em mostrar que as demonstrações indutivas de uma

21 Lange parece negar o próprio aspecto objectivo destas propriedades quando afirma que extraterrestres nunca veriam, por exemplo, a simetria como saliente (Lange 2014: n. 33).

mesma proposição matemática, baseadas nas estruturas *indução-1* e *indução-5*, são circulares.

A estrutura *indução-5* é a seguinte:

Indução-5

Seja uma propriedade P:

1) Caso base: $P(5)$
2) Passos indutivos:

a) $\forall_{k \in \mathbb{N}} P(k) \Rightarrow P(k+1)$

b) $\forall_{k \in \mathbb{N}} k > 1, P(k) \Rightarrow P(k\text{-}1)$

Conclusão: $\forall_{n \in \mathbb{N}} P(n)$

Consideremos agora, por exemplo, a demonstração por indução da propriedade seguinte:

$$P: \forall_{n \in \mathbb{N}} 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demonstração por *indução-1*:

Caso base: $P(1)$

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

Passo indutivo: $\forall_{k \in \mathbb{N}} P(k) \Rightarrow P(k+1)$

$$P(k+1): \underbrace{1+2+\ldots+k}_{P(k)} + k + 1 = P(k) + k + 1 =$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Demonstração por *indução-5*:

Caso base: $P(5)$

$$1+2+3+4+5 = \frac{5(5+1)}{2} = 15$$

Passo indutivo a): ver passo indutivo na demonstração *indução-1*

Passo indutivo b): $\forall_{k \in \mathbb{N}} k > 1, P(k) \Rightarrow P(k\text{-}1)$

$$P(k-1): 1+2+\ldots+k-1=\underbrace{1+2+\ldots+k-1+k}_{P(k)}-k=P(k)-k=$$

$$=\frac{k(k+1)}{2}-k=\frac{(k-1)k}{2}$$

Ambas as demonstrações inferem o mesmo *explanandum*, *P*. Todavia, ambas as demonstrações não podem ser explicativas, sob pena da circularidade que se explicita no argumento seguinte.

Circularidade da indução:

1) Na demonstração *indução-1*, o caso base *P*(1) ajuda a explicar por que razão *P*(5) é o caso.
2) Na demonstração *indução-5*, o caso base *P*(5) ajuda a explicar por que razão *P*(1) é o caso.
3) *P*(1) ajuda a explicar porque razão *P*(1) é o caso. (Transitividade de1) e 2))

Lange conclui que as demonstrações por indução matemática não são explicativas.

A clareza e simplicidade deste argumento tornou-o atractivo na literatura. Uma bateria de artigos direccionou-se contra a sua posição (Baker 2010; Hoeltje, Schnieder, e Steinberg 2013; Wysocki 2017; Dougherty 2018; Lehet 2019).

Comecemos por um contra-exemplo formulado por Tomasz Wysocki (2017).

Seja a função, $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$f(1)>8, \quad (1)$$

$$\forall_n f(n)<f(n+1) \quad (2)$$

Ou seja, *f* é uma função estritamente crescente.

Consideremos agora que pretendemos demonstrar: $\forall_n f(n)>8$

A técnica de demonstração por *indução-1* não levanta qualquer problema na demonstração.[22] No entanto, a demonstração por *indução-5* levanta um problema à proposta de Lange. Tal como na demonstração *indução-1*, na demonstração *indução-5*, a condição (1), $f(1)>8$ é necessária, quer para demonstrar o caso base, $f(5)>8$, quer para demonstrar o passo indutivo b) $\forall_{k\in\mathbb{N}}\ k>1,\ P(k) \Rightarrow P(k\text{-}1)$. A condição (2) não é suficiente para demonstrar o caso base, $f(5)>8$, nem para demonstrar o passo indutivo b), $\forall_{k\in\mathbb{N}}\ k>1,\ P(k) \Rightarrow P(k\text{-}1)$.

Demonstração por *indução-5*

Caso base, P(5): $f(5)>8$.

Dada a condição (1), $f(1)>8$, e a condição (2) $\forall_n f(n)<f(n+1)$ segue-se que $8<f(1)<f(2)<\ldots<f(5)$. Logo: $f(5)>8$.

Passo indutivo b): $\forall_{k\in\mathbb{N}}\ k>1,\ P(k) \Rightarrow P(k\text{-}1)$

Queremos mostrar: $\forall_{k\in\mathbb{N}}\ k>1, f(k)>8 \Rightarrow f(k\text{-}1)>8$

Suposição: $\forall_{k\in\mathbb{N}}\ k>1, f(k)>8$

Condição (2) de f : $\forall_n f(n)< f(n+1)$

22 Caso base, P(1): $f(1)>8$ Proposição verdadeira, a partir da própria definição da função.

Passo indutivo: $\forall_{k\in\mathbb{N}}\ P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Queremos mostrar: $\forall_{k\in\mathbb{N}}\ f(k)>8 \Rightarrow (k+1)>8$

Suposição: $\forall_{k\in\mathbb{N}}\ f(k)>8$

Condição (2) de f: $\forall_n f(n)<f(n+1)$

Da conjunção da suposição e das condições anteriores, resulta:
$\forall_{k\in\mathbb{N}}\ 8<f(k)<\mathrm{f}(k)<f(k+1)$. Logo: $\forall_{k\in\mathbb{N}}\ f(k+1)>8$

Conclusão: $\forall_n f(n)>8$

Condição (1) de f : $f(1)>8$

Da conjunção da suposição e das condições anteriores, resulta:

$\forall_{k\in\mathbb{N}}\ k>1,\ 8<f(k\text{-}1)<f(k)$

Logo: $\forall_{k\in\mathbb{N}}\ K>1, f(k\text{-}1)>8$

Conclusão: $\forall_n f(n)>8$

A demonstração por *indução-5* de $\forall_n f(n)>8$ requer o caso base da demonstração por *indução-1*. Portanto, Wysocki (2017: 16) conclui que Lange não pode afirmar que a demonstração por *indução-5* explica o caso base $P(1)$, porque o caso base $P(1)$ é uma das premissas da demonstração por *indução-5*. No argumento acima, *circularidade da indução*, a premissa 2) é falsa.

Alan Baker (2010) adopta uma estratégia diferente. Ele ataca a premissa do argumento de Lange, segundo a qual não existe qualquer diferença entre as demonstrações por *indução-1* e por *indução-5*. Esta premissa não é explícita no argumento acima, *circularidade da indução*, mas é uma premissa pressuposta no argumento, para que possa ocorrer a transitividade entre as premissas 1) e 2). Ou seja, para que a expressão 'ajuda a explicar' tenha o mesmo significado em ambas as premissas é necessário que não haja qualquer diferença entre as demonstrações por *indução-1* e por indução-5. Baker observa que a demonstração por *indução-5* é mais longa, mais complexa e mais disjunta do que a demonstração por *indução-1*.

Particularmente, ele argumenta que a demonstração por *indução-1* é mais minimal do que a demonstração por *indução-5*. A demonstração por *indução-1* tem apenas dois passos (o caso base e o passo indutivo); a demonstração por *indução-5* tem três passos (o caso base e dois passos indutivos). Um aspecto relativamente consensual na teoria da explicação é que uma explicação apenas deve evocar aspectos relevantes para a explicação. Por exemplo, quando um pedaço de sal 'enfeitiçado' se dissolve em água, o 'feitiço' sobre o sal é irrelevante para explicar a sua solvência. Analogamente, a demonstração por *indução-5* tem um passo indutivo (o passo indutivo b) de 'cima para baixo') que é irrelevante, quando comparada à demonstração por *indução-1*.

Baker conclui que a demonstração por *indução-5* não parece ser uma demonstração explicativa.

Esta análise em torno das demonstrações por indução matemática, que agora termino, ilustra bem como se opera uma dissolução do confronto entre metodologias de 'baixo para cima' *versus* metodologias de 'cima para baixo' que referi na introdução desta parte. Primeiro, a análise começa por se centrar exclusivamente na estrutura demonstrativa. Segundo, apresentam-se argumentos a favor e contra essa estrutura. Terceiro, o conceito *explicação* aparece na argumentação, mas epistemicamente ancorado. Ou seja, em momento algum a análise esteve preocupada sobre questões metodológicas de 'cima para abaixo' ou de 'baixo para cima', nem preocupada sobre qualquer alegada superioridade de uma relativamente à outra. A discussão simplesmente decorre com rigor analítico firme.

Interlúdio. Terminamos a primeira parte do artigo. Em seguida, iniciaremos a segunda parte do artigo que será dedicada à explicação extra-matemática.

3 Explicação extra-matemática

Uma explicação extra-matemática é constituída por uma componente empírica e uma componente matemática. O *explanans* tem, necessariamente, uma componente matemática. Além da componente matemática, o *explanans* pode também conter outras componentes não-matemáticas. O *explanandum* é constituído por um facto empírico. Alega-se que a componente matemática contribui para explicar a componente empírica. Precisamente, se se eliminar a componente matemática do *explanans*, o *explanandum* não se segue do *explanans*. Eis alguns exemplos de explicações que obedecem à relação acima entre o *explanans* e o *explanandum*.

a) Não consigo dividir sete sardinhas inteiras pelos meus três gatos, porque sete não é divisível por três.

b) Se mergulharmos uma estrutura paralelepipedal oca numa solução líquida de sabão, obtemos no seu interior películas de sabão com a configuração da figura abaixo (tracejado), porque tal configuração é aquela que minimiza a área de superfície das películas de sabão.

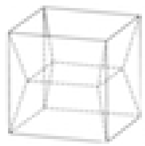

Figura1[23]

c) As sete pontes de Königsberg não podem ser todas atravessadas uma única vez numa caminhada, porque configuração das pontes não é um grafo com um 'passeio de Euler'.

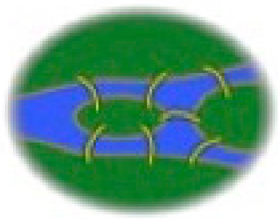

Figura 2[24]

O caminho principal para a modelação das EEM tem sido a readaptação de modelos explicativos do passado. Ou seja, em geral, os modelos propostos para as EEM são modelos derivados de modelos clássicos para a explicação científica ordinária como, por exemplo, o modelo dedutivo-nomológico de Carl Hempel (1965: 331–497), o modelo das questões 'porquê?' de Bas van Fraassen (1980: cap. 5), o modelo contrafactual da explicação de James Woodward (2003), entre outros. Estes modelos têm sido readaptados com vista a cobrirem as EEM. Contudo, este caminho tem encontrado imensos problemas. Durante anos, os modelos clássicos para a explicação científica ordinária foram sujeitos a uma massiva bateria de contra-exemplos. A história repete-se. O repositório de contra-exemplos aos modelos originais da explicação

23 http://mathworld.wolfram.com/PlateausProblem.html

24 Creative commons. https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.en

científica começou a servir também de repositório contra os modelos derivados para as EEM.

Antes de abordarmos modelos para as EEM, importa sintetizar alguns dos problemas centrais apontados aos modelos clássicos da explicação científica, mas com as novas roupagens das EEM. Nas subsecções seguintes analiso três modelos para as EEM – modalidade, abstracção e dedução. Em cada uma das subsecções começarei por introduzir as características principais de cada modelo. Posteriormente, tento analisar a resposta destes modelos relativamente a alguns dos problemas que identifico seguidamente para as EEM.

3.1 *Problemas para as EEM*

Os problemas que me parecem mais prementes em torno das EEM são os problemas da assimetria, relevância, genuinidade e causalidade.

O *problema da assimetria* é o problema segundo o qual o poder explicativo depende do sentido direccional da relação entre o *explanans* e o *explanandum*. Dada uma explicação *E*, alega-se que se se inverter o sentido da explicação *E*, nomeadamente, operando uma troca entre o *explanandum* e uma das proposições do *explanans*, o poder explicativo de *E* simplesmente se evapora. Por exemplo, considerando que *tenho sete sardinhas em minha posse* e que *sete não é divisível por três*, estas duas proposições supostamente explicam por que razão não consigo dividir as sardinhas pelos meus três gatos; assimetricamente, considerando que *consigo dividir as sardinhas em minha posse pelos meus três gatos* e que *sete não é divisível por três*, são duas proposições que alegadamente não têm poder para explicar por que razão não tenho sete sardinhas em minha posse.[25]

O *problema da relevância* é o problema de haver proposições no *explanans* que não parece que desempenhem qualquer papel explicativo no *explanans.* Por exemplo:

25 O *problema de assimetria* para as EEM tem uma estrutura ligeiramente diferente do problema de assimetria para a explicação científica ordinária. Na explicação científica ordinária a assimetria estabelece- se por uma troca directa entre o *explanandum* e uma das premissas do *explanans*. Nas EEM a assimetria estabelece-se por uma troca entre a negação do *explanandum* e a negação de uma das premissas do *explanans*. Ver Craver e Povich (2017) para mais exemplos a respeito deste problema.

Explanans
(1) Tenho sete sardinhas em minha posse.
(2) 2+2 =4.
(3) Se 2+2 =4, sete não é divisível por três.
Explanandum
Não consigo dividir as sete sardinhas em minha posse pelos meus três gatos.

A premissa (2) do *explanans*, apesar de ser uma proposição matemática necessária para inferir a conclusão (via *modus ponens*), não parece que tenha qualquer papel explicativo. Ou seja, a premissa (2) é irrelevante para a explicação.

O *problema da genuinidade* é o problema em distinguir entre EEM e explicações científicas ordinárias que usam matemática (doravante, ECM). No âmbito das explicações científicas ordinárias há explicações que não requerem o uso de matemática. Por exemplo, não tenho de invocar qualquer proposição matemática para explicar por que razão o melro na minha varanda é de cor negra. Parece ser uma lei da natureza que 'todos os melros são negros'. O melro na minha varanda é simplesmente uma exemplificação dessa lei.

Em contraste, há explicações científicas ordinárias que usam matemática. Por exemplo, para explicar por que razão aterrei em Paris-Orly às 13h, partindo do Porto às 11h, é necessário efectuar um cálculo matemático relativo à distância Paris-Porto e à velocidade média de viagem do avião. Nomeadamente, para determinar o tempo de voo é necessário efectuar a divisão algébrica entre o deslocamento percorrido e a velocidade média do avião, desprezando outros efeitos negligenciáveis como a aceleração de Coriolis. Porém, intuitivamente, não parece que este cálculo desempenhe qualquer papel explicativo para a minha aterragem em Orly às 13h, tendo partido do Porto às 11h. A explicação mais plausível para o fenómeno parece apenas depender das leis que regem o movimento aeronáutico na superfície terrestre, ignorando aspectos psicológicos relativos à minha vontade de viajar para Paris.

Acontece que a maior parte das ciências, como a Física ou a Química, usam massivamente matemática. Todavia, em grande medida, o uso de matemática nestas áreas é apenas instrumental.

A matemática é um instrumento para a resolução de problemas. Assim, o problema de genuinidade relativo às EEM é o seguinte: quer as EEM, quer as ECM, usam matemática; como distinguir então as EEM das ECM? Este é um problema sério. Os *partisans* das EEM têm tentado resistir aos propósitos reducionistas das EEM nas ECM, apresentando diferentes soluções ao problema. Contudo, no meu ponto de vista, nenhuma das soluções vindas a lume responde de forma cabal ao problema em questão.

Finalmente, o último problema é o *problema da causalidade*. Em geral, este problema não tem sido discutido na literatura contemporânea, porque a maior parte dos filósofos assume que a designação EEM-causal é um oxímoro.[26] Este oximoro motiva-se no conjunto de ideias seguintes. Entidades matemáticas são entidades abstractas que não se localizam no espaço-tempo. Tudo aquilo que não se localiza no espaço-tempo não tem poderes causais. Tudo aquilo que não tem poderes causais não pode participar em cadeias causais. Em particular, entidades matemáticas não podem participar em cadeias causais. As EEM são explicações que referem entidades matemáticas. Assim, as EEM são explicações não-causais.

Parece-me que o conjunto de ideias anteriores esconde vários problemas para os modelos não-causais das EEM. Primeiro, alguns autores consideram a matemática como uma disciplina empírica e não abstracta. Ou seja, para estes autores não é verdade que as entidades matemáticas sejam entidades abstractas que não se localizam no espaço-tempo (e.g. Maddy 1990; Mill 1843). Assim, de acordo com esta concepção, as EEM, se existirem, serão explicações causais em virtude da própria natureza empirista da matemática. Segundo, alguns autores defendem que toda a explicação científica é uma explicação causal (e.g. Lewis 1986; Salmon 1984). Como acomodar as EEM nesta visão sobre o assunto? Terceiro, os platonistas têm de fornecer argumentos para a alegada conexão explicativa entre dois mundos distintos – o mundo abstracto e o mundo empírico. Sendo as EEM explicações não-causais acerca de acontecimentos no espaço-tempo, é um mistério como uma explicação não-causal pode restringir acontecimentos iminentemente causais que se desenrolam no

26 A excepção a este estado de coisas é Reutlinger e Andersen (2016). Ver mais à frente a parte final da secção 3.3.

espaço-tempo.[27] Quarto, as explicações não-causais não são exclusivas do domínio matemático. Por exemplo, as leis de conservação da Física, como a lei de conservação de energia, podem ser usadas em explicações e, no entanto, as leis de conservação parecem ser leis não-causais. Estas leis apenas restringem aquilo que pode acontecer.[28] Estas explicações, se invocarem proposições matemáticas no *explanans*, acabam por adensar o problema de genuinidade de distinguir entre ECM e EEM.

3.2 *Modalidade*

Marc Lange (2013; 2016) defende que as EEM são explicações modalmente mais fortes do que as explicações científicas causais ordinárias. Concretamente, as EEM são explicações que invocam factos matemáticos que são modalmente mais fortes do que os factos associados às leis causais. Estas explicações *restringem* aquilo que pode ocorrer. Tais explicações são análogas aos princípios de simetria da Física (e.g. princípio da relatividade, invariância do intervalo espaço-tempo entre acontecimentos, etc.).

Ainda que Lange subscreva a ideia de que as EEM são explicações não-causais, ele tem o cuidado de referir que tais explicações podem invocar entidades causalmente activas no seu *explanans*. Por exemplo, a explicação segundo a qual não consigo dividir sete sardinhas inteiras pelos meus três gatos, porque sete não é divisível por três, tem um elemento causal. A quantidade de sardinhas é uma causa que explica o meu insucesso na divisão. Porém, esta explicação não é uma explicação causal, no sentido corrente da sua caracterização, a saber: o *explanandum* não depende de um *historial das relações causais do mundo.*

Um problema imediato que encontro na proposta de Lange é de não estabelecer qualquer definição concreta para as EEM. Lange dá muitos exemplos de supostas EEM, mas em parte alguma do artigo é estabelecida uma definição precisa para o que seja uma EEM. Ele simplesmente defende que as EEM são modalmente mais fortes

27 Note-se que este problema é um problema geral para os modelos não-causais da explicação científica, sempre que o *explanandum* é um acontecimento no espaço-tempo.

28 Ver Lange (2016: cap. 2).

do que as explicações causais ordinárias e, tanto quanto consegui compreender, o tipo de possibilidade em questão é a possibilidade matemática. (Lange 2016: 132). Ora, acontece que à luz da melhor tradição metafísica, isto levanta vários problemas à proposta.

Lange argumenta que quando dizemos que é impossível atravessar as pontes de Königsberg numa só caminhada, estamos a supor que seria batota 'recortar' as pontes e colocá-las numa outra configuração arquitectónica, com vista a poder atravessá-las numa única caminhada (Lange 2018: 86). Parece haver uma premissa escondida na argumentação de Lange, de que a sua análise se reporta apenas ao conjunto dos mundos possíveis com a configuração das pontes de Königsberg. Ora, nesse conjunto é matematicamente impossível atravessar as pontes de Königsberg. Todavia, quando se diz que um acontecimento é matematicamente impossível, dizemos que esse acontecimento é impossível em qualquer mundo e não apenas no conjunto de mundos possíveis com a configuração das pontes de Königsberg. Por outras palavras, tudo aquilo que é matematicamente impossível também é fisicamente impossível. No entanto, é fisicamente possível alterar a configuração das pontes e, consequentemente, é fisicamente possível atravessar as pontes de Königsberg numa só caminhada.[29]

Com vista a ultrapassar a objecção anterior, Lange (2016: cap. 3) refina a sua proposta distinguindo três tipos de explicação, consoante o tipo de *explanandum* envolvido na explicação. Uma explicação tipo-*c* é uma explicação por restrição (o *explanans* é totalmente constituído por restrições). Uma explicação tipo-*n* é uma explicação na qual o *explanandum* não é uma restrição (o *explanans* não é totalmente constituído por restrições). Uma explicação tipo-*m* é uma explicação na qual o *explanandum* é um facto modal (o *explanans* é constituído pelo

29 Este aspecto pode ser adicionalmente pressionado através do contra-exemplo seguinte. Consideremos um mundo possível, digamos um mundo dogmaticamente *igualitário*, onde, após distribuir as setes sardinhas pelos três gatos, as sardinhas sofrem um processo metafísico de duplicação/fusão de tal forma que se obtém uma divisão igualitária de sardinhas inteiras pelos três gatos. Nesse mundo possível, as sete sardinhas teriam sido divididas de forma igual pelos três gatos. Posições que consideram a possibilidade lógica como sendo mais ampla do que a possibilidade metafísica, o mundo possível dogmaticamente igualitário constitui-se então num contra-exemplo à proposta de Lange.

mesmo tipo de modalidade). A respeito das pontes de Königsberg podemos assim distinguir três tipos de *explananda:*

> Tipo-*c*: nunca ninguém conseguiu atravessar numa só caminhada as pontes com uma configuração *K* (nomeadamente, a configuração das pontes de Königsberg em 1735).
>
> Tipo-*n*: nunca ninguém conseguiu atravessar numa só caminhada as pontes de Königsberg com a configuração de 1735.
>
> Tipo-*m*: é *impossível* atravessar numa só caminhada pontes com uma configuração *K*.

Este refinamento pouco intersecta a objecção que apontei acima. Os *explananda* tipo-*m* e tipo-*c* são abstractos, uma vez que invocam uma configuração abstracta *K*. O problema de atravessamento das pontes é a respeito da configuração actual das pontes de Königsberg e não a respeito de uma abstracção. No caso do *explanandum* tipo-*n*, estamos novamente a considerar o conjunto de mundos possíveis com a configuração das pontes de Königsberg que é um subconjunto de todos os mundos possíveis com qualquer configuração que as pontes possam ter. A objecção anterior mantém-se.

O problema de assimetria é um problema para o modelo de Lange. Craver e Povich (2017) apresentam uma série de contra-exemplos ao modelo de Lange que, na verdade, são variantes ao exemplo que indiquei acima a respeito da distribuição de sardinhas pelos gatos. Lange (2018) concorda que existe uma direcção para a explicação e que as inversões, resultantes da troca entre o *explanandum* e uma das premissas do *explanans*, não são explicações genuínas. Argumenta que, por exemplo, o facto de alguém conseguir atravessar as pontes de Londres, numa só caminhada, não pode ajudar a explicar por que razão a configuração das pontes de Londres tem a propriedade matemática de um passeio de Euler. Em contraste, o facto da configuração das pontes de Königsberg não possuir a propriedade matemática de um passeio de Euler pode ajudar a explicar por que razão ninguém consegue atravessar as pontes de Königsberg numa só caminhada. O contexto das questões-porquê tem de especificar a tarefa a ser realizada na questão que se formula. No caso das pontes de Königsberg, a questão – por que razão ninguém consegue atravessar as pontes numa só caminhada? – especifica a tarefa a realizar. No entanto, no caso das pontes de Londres, a questão – por que razão a configuração das pontes de Londres tem a propriedade matemática de um passeio de Euler? – não especifica qual é a tarefa a realizar.

A respeito do problema de relevância, Lange defende a sua proposta nas ideias seguintes. Um explanans é constituído por proposições irrelevantes para um *explanandum*, se um subconjunto de proposições do *explanans*, por si só, logicamente implica o *explanandum*. Assim, explanans 'inflacionados' com proposições irrelevantes para o *explanandum* não são explicativos. Um explanans apenas é explicativo de um *explanandum* se não existir um subconjunto de proposições do *explanans* que logicamente implique o *explanandum* (Lange 2016: 136–137).

O problema mais sério que encontro na proposta de Lange é respeitante ao problema de genuinidade de como distinguir entre EEM e ECM. Sem uma definição clara sobre o que seja uma EEM, Lange acaba por socorrer-se do contexto para lidar com este problema: 'não existe qualquer critério que distinga claramente as explicações distintivamente matemáticas das explicações não-causais que apelam a alguns factos matemáticos. Pelo contrário, é uma questão de grau e de contexto' (Lange 2013: 507). Uma vez que existem EEM que fazem uso de leis físicas e dada a estipulação não-causal das EEM, Lange debate-se assim com o problema de como conciliar leis físicas, leis que em geral são leis causais, com o alegado carácter não-causal das EEM. Lange acaba a defender, por exemplo, a posição extrema de que a segunda lei de Newton,[30] uma lei corrente usada na dinâmica de corpos, é uma lei não-causal. Segundo Lange, por exemplo, as quatro posições de equilíbrio de um movimento do pêndulo duplo, quando explicadas por intermédio do teorema de Weierstrass,[31] coadjuvado com a segunda lei de Newton, é uma EEM e uma explicação não-causal, porque:

30 $F = m.a$: a força que actua sobre um objecto é igual à sua massa vezes a aceleração do seu movimento.

31 Seja f uma função contínua num conjunto compacto (i.e., fechado e limitado). Então f tem um valor máximo e mínimo absolutos nesse conjunto.

> A segunda lei de Newton apenas descreve a estrutura segundo a qual qualquer força deve actuar; não descreve (nem abstractamente) as forças particulares que actuam numa dada situação. Qualquer força possível obedece à segunda lei de Newton. (Lange 2013: 503)

A saída de Lange para o problema acima referido é assim colocar as leis físicas como descrevendo a estrutura do próprio espaço-tempo (que é a melhor interpretação/tradução que encontro para 'framework'). Todavia, para Lange, tais leis não descrevem coisa alguma a respeito das forças que ocorrem nesse espaço-tempo. Isto parece-me obscuro. As margens de um rio estruturam o percurso do rio, porque *causam* o seu percurso. Uma força de 10N, se aplicada num corpo com massa de 1kg, implica uma aceleração no corpo de $10m/s^2$. Ainda que isto possa apenas ser descritivo da estrutura do espaço-tempo, é misterioso como pode o espaço-tempo estruturar esse movimento sem qualquer intervenção causal. Concedendo que a segunda lei de Newton é apenas descritiva, um problema remanescente para Lange é de que as forças que actuam no pêndulo fazem parte do conteúdo da explicação.

3.3 *Abstracção*

Jackson e Pettit (1990) defendem que existem dois tipos de explicação: explicações por processos e explicações por programas. O primeiro tipo de explicações são explicações que detalham as causas (*explanans*) que produzem determinado acontecimento (*explanandum*); o segundo tipo de explicações são explicações que invocam propriedades abstractas que asseguram que o *explanandum* seja uma exemplificação dos processos causais que o originam.

A proposta de Jackson e Pettit clarifica-se pela analogia seguinte. Num computador os programas ordenam processos físicos. Efectuo pressões nas teclas do meu computador para escrever este artigo. Um processo físico estabelece uma cadeia causal entre as pressões dos meus dedos e as letras que aparecem no monitor. Todavia, este processo causal apenas pode existir em virtude de um programa computacional que ordena o suporte físico do computador. Para explicar o texto que aparece no monitor invoco assim duas explicações: uma explicação a respeito do processo físico e uma explicação a respeito do programa que faz funcionar esse processo físico.

A segunda explicação é uma *explicação abstracta* de nível superior: é uma explicação causalmente relevante, no sentido que assegura o funcionamento do computador, mas não é causalmente eficaz, no sentido que é causalmente inerte no processo causal que conduz ao aparecimento do texto no monitor.

Aidan Lyon (2012) procurou ajustar o modelo de Jackson e Pettit (1990) com vista a cobrir as EEM. Lyon defende que as EEM são explicações-programa: são explicações não-causais que fornecem informação modal que as explicações-processo não são capazes de fornecer (Lyon 2012: 566). A modalidade das explicações-programa é uma modalidade de necessidade física. Ou seja, a propriedade abstracta causalmente relevante de nível superior é fisicamente necessária para 'activar' a propriedade física causalmente eficaz de nível inferior. Neste sentido, a modalidade das explicações-programa é mais fraca do que a modalidade de necessidade matemática de Lange que analisámos na subsecção anterior.[32]

Embora Lyon seja omisso sobre a sua proposta *vis-à-vis* os problemas anteriormente referidos, as explicações-programa dão uma boa resposta aos problemas de assimetria e de relevância. A respeito do problema de assimetria, a necessidade física invocada nestas explicações bloqueia a simetria explicativa. Assim, no famoso exemplo *mastro/sombra*, as leis da geometria podem explicar o comprimento da sombra do mastro, a partir da altura do mastro, mas, assimetricamente, as leis da geometria não conseguem explicar a altura do mastro, a partir do comprimento da sombra do mastro, porque a sombra do mastro não tem propriedades causalmente eficazes. A conexão de necessidade física, entre a propriedade abstracta causalmente relevante e a propriedade física causalmente eficaz, não é simétrica. A respeito do problema de relevância, um raciocínio análogo verifica-se no caso da inserção no *explanans* de proposições matemáticas *ad hoc*. Tais proposições não estabelecem qualquer relação de relevância com o *explanandum* e, assim, podem ser descartadas do *explanans*. Negativamente, as explicações-programa não parecem conseguir responder ao problema de genuinidade, de como distinguir entre EEM e ECM. Este problema é veladamente admitido por Lyon, não propondo qualquer solução para o mesmo: 'não vou apresentar uma

32 Ver Saatsi (2012) para um conjunto de objecções a Lyon.

teoria geral de como a matemática pode desempenhar um trabalho explicativo'(Lyon 2012: 569).

Christopher Pincock também avançou com uma proposta de abstracção para modelar as EEM. Precisamente, defende que uma explicação é abstracta sempre que encontrámos uma '(1) classificação de sistemas usando (2) uma entidade mais abstracta que está (3) apropriadamente conectada ao fenómeno a ser explicado' (Pincock 2015: 867).

Quer Lyon, quer Pincock, defendem que as EEM são explicações abstractas, mas há uma ligeira diferença nas suas propostas. Embora uma explicação abstracta, nos termos em que a Pincock a define, possa ser uma explicação-programa, o inverso não parece ser o caso. Algumas explicações-programa não têm conteúdo suficiente para ser uma explicação abstracta. Ambas as explicações invocam os aspectos mais abstractos do fenómeno. Porém, as explicações abstractas de Pincock vão mais longe. Além dos aspectos abstractos do fenómeno, também são invocadas propriedades e entidades abstractas gerais sobre esse tipo de fenómenos.

Se considerarmos, por exemplo, as leis de Plateau, discutidas tanto por Pincock, como por Lyon, podemos clarificar melhor esta concepção. As leis de Plateau são leis estabelecidas experimentalmente a respeito da forma e do valor dos ângulos de intersecção de superfícies de películas de sabão (ver figura 2 acima). Apenas mais tarde, Jean Taylor e Frederick Almgren (Taylor 1976; Almgren e Taylor 1976) forneceram um modelo matemático para estas leis experimentais. Feito este breve enquadramento, existem duas explicações abstractas concorrentes possíveis para a configuração (ou seja, os ângulos de intersecção) de superfícies de películas de sabão. Segundo a proposta de Lyon, tal configuração das superfícies minimiza a área de superfície das películas. Esta é uma explicação-programa – uma explicação que apela a um elemento abstracto do próprio fenómeno. Porém, Pincock considera que esta explicação é insuficiente. Apenas a teoria de Taylor pode explicar a aplicabilidade geral das leis de Plateau. Esta é uma explicação abstracta, mas mais abrangente do que a explicação-programa de Lyon. É uma explicação a respeito de uma regularidade que se verifica em todas as películas de sabão. Por outras palavras, a objecção de Pincock, *contra* Lyon, fundamenta-se na constatação de uma lacuna das explicações-programa:

as explicações-programa são explicações que se aplicam bem a acontecimentos particulares, mas parece que são insuficientes para modelar regularidades, como a regularidade verificada a respeito da configuração das películas de sabão (Saatsi 2012: 580).

Classificar as EEM como explicações abstractas é intuitivamente apelativo. Em termos de senso comum, a matemática é uma disciplina abstracta e, assim, a abstracção será um bom conceito para modelar este tipo de explicações. Contudo, embora o senso comum possa ser um bom guia para a nossa razão, a edificação de teorias a partir do senso comum pode revelar-se bastante difícil. O conceito *abstracção* é um conceito problemático. A caracterização de Pincock das explicações abstractas, nos termos vagos e circulares das três condições acima mencionadas, pouco ajuda para uma cimentação deste conceito na literatura: circularmente, o termo 'abstracta' é simultaneamente *definiens* e *definiendum*; é pouco claro o significado de 'apropriadamente ligado'. Isomorfismo? Bijecção? Mapa? À luz da caracterização de Pincock, segue-se que a generalidade das leis físicas usadas nas explicações científicas passa a cair no domínio das explicações abstractas. Pois, tais leis, quando vazias da sua exemplificação, são leis abstractas que se ligam ao fenómeno a ser explicado. Estas leis alimentam uma variante do oxímoro acima referido a respeito do *problema de causalidade* – abstracto-causal.

Reutlinger e Andersen (2016), por exemplo, defendem que a caracterização das explicações abstractas de Pincock, na verdade, subscreve uma noção de abstracção, segundo a qual uma explicação é abstracta quando o *explanans* tem múltiplos realizadores microfísicos. Por outras palavras, uma explicação é abstracta quando o *explanans* deixa de fora todos ou quase todos os aspectos microfísicos causais a respeito do acontecimento a explicar. Note-se que esta caracterização de abstracção de Reutlinger e Andersen não é melhor do que a caracterização de Pincock. Estamos perante um 'albergue espanhol' da explicação pronta a acomodar os mais variados tipos de explicação. Aparentemente, apenas as explicações da física atómica e nuclear ficarão de fora desta ampla caracterização![33] Ainda assim,

33 A nota que Reutlinger e Andersen acrescentam pouco ajuda à clarificação da sua caracterização de 'abstracto'. Continua a ser pouco claro o que se entende por 'microfísico' e 'quase todos': 'Usamos a noção de realizabilidade múltipla para

vale a pena notar que com esta caracterização da noção de abstracção os autores argumentam que existem (1) explicações causais abstractas e (2) e explicações abstractas causais. Por exemplo, (1) usualmente diz-se que o tabaco provoca o cancro do pulmão. Esta é uma explicação causal, mas também é uma explicação abstracta, porque não invoca detalhes microfísicos. (2) As redes bayesianas são usadas em explicações que se baseiam em equações matemáticas, que não especificam detalhes microfísicos, e, no entanto, são a respeito de relações causais. Paradoxalmente, este tipo de exemplos abstractos e causais, baseados em matemática, era justamente aquilo que Pincock pretendia de todo evitar com a sua proposta: 'ninguém pensa que na matemática pura existem as relações causais' (Pincock 2015: 867).

3.4 *Dedução*

Como mencionado na introdução deste artigo, o modelo dedutivo-nomológico de Hempel defende que uma explicação científica é um argumento dedutivo válido, onde as premissas do argumento são o *explanans* e a conclusão é o *explanandum*. O *explanans* é necessariamente constituído por leis da natureza e condições iniciais.[34] Quando tentamos adaptar este modelo, com vista a cobrir as EEM, obtemos a estrutura seguinte: o *explanans* é constituído por uma ou mais proposições matemáticas, onde a remoção destas proposições do *explanans* tornará o argumento dedutivo inválido. Assim, as proposições matemáticas do *explanans* são essenciais para a dedução da conclusão. A inclusão de leis da natureza no *explanans*, a par das proposições matemáticas, é facultativa e está dependente da explicação particular em causa.

Os exemplos acima introduzidos sobre as sardinhas/gatos, as pontes de Königsberg e a forma geométrica das películas de sabão não dependem de qualquer lei da natureza. Nestes exemplos parece

referir (a) o facto que alguns tipos de comportamento de alto-nível podem ser realizados por múltiplos tipos de comportamento microfísico e (b) o facto que alguns espécimes de comportamento de alto nível podem ser exemplificados por múltiplos espécimes de comportamento microfísico.' (Reutlinger e Andersen 2016: n. 2)

34 Para mais detalhes sobre o modelo DN, o leitor de deve consultar o artigo "Explicação Científica" (Castro 2020a) deste compêndio.

que as proposições matemáticas e algumas condições iniciais serão suficientes para explicar o fenómeno em causa. Em contraste, uma explicação famosa na literatura sobre o ciclo de vida de uma espécie de cigarras na América do Norte é uma explicação que inclui uma lei da natureza (lei biológica) e uma proposição matemática. A duração do ciclo de vida das cigarras tem a particularidade de ser constituída por um número de anos ímpares (13 ou 17 anos).

[*Explanans*]

(1) Ter um período de ciclo de vida que minimiza a intersecção com outros períodos (próximos/inferiores) é evolucionariamente vantajoso ('lei' biológica).

(2) Os períodos com uma duração prima minimizam a intersecção (comparativamente aos períodos com uma duração não-prima). [teorema teórico dos números]

(3) Consequentemente, os organismos com períodos de ciclos de vida tendem a evoluir para períodos com uma duração prima. [lei 'mista' biológica matemática]

Quando a lei expressa em (3) é combinada com

(4) As cigarras dum ecossistema, E, estão limitadas por restrições biológicas a períodos com uma duração de 14 a 18 anos. [restrição ecológica]

[*Explanandum*]

(5) Consequentemente, as cigarras do ecossistema, E, tendem a evoluir para períodos com uma duração de 17 anos. (Baker 2005: 233)

Tanto quanto sei, Steiner (1978b) é a primeira proposta de um modelo com características dedutivas para as EEM. Segundo este modelo existem demonstrações explicativas de certas proposições matemáticas, ou seja, existem EIM. Uma EEM, por sua vez, procede a uma relação entre a proposição matemática demonstrada e o *explanandum* físico a explicar. Por outras palavras, uma EEM é constituída por uma EIM e uma relação entre o *explanandum* físico a explicar. Eliminando estas suposições físicas adicionais à EIM, obtemos a demonstração explicativa inicial da proposição matemática invocada no *explanans.* Steiner reclama que no caso de uma explicação científica ordinária se eliminarmos as suposições físicas da explicação, nada mais resta no *explanans.*

O modelo de Steiner é bastante inadequado. Primeiro, nas EEM que temos vindo a apreciar, em nenhuma delas é invocada tal coisa como uma demonstração matemática das proposições matemáticas contidas no *explanans.* Mesmo introduzindo essas demonstrações no *explanans*, tal procedimento estaria muito afastado da prática científica corrente. Em geral, os cientistas recorrem a proposições matemáticas desconhecendo por completo as demonstrações matemáticas por detrás de tais proposições. Segundo, não é verdade que numa explicação científica ordinária se eliminarmos as proposições físicas do *explanans*, nada resta no *explanans*. As ECM são constituídas por proposições físicas e proposições matemáticas. Se as proposições físicas forem eliminadas do *explanans*, as proposições matemáticas continuam a fazer parte do *explanans.*

Sam Baron (2019) e Daniele Molinini (2014) são duas referências na literatura recente que analisaram propostas dedutivas para as EEM. Molinini analisa uma extensão do modelo dedutivo para cobrir as EEM e as EIM, e argumenta que tal extensão não cobre de forma adequada qualquer das explicações. A proposta de Baron é exclusiva para as EEM e é uma defesa desse modelo para as EEM. Sinteticamente, os modelos seguem a caracterização geral que acima referi para os modelos dedutivos: argumentos dedutivos, onde o *explanans* tem pelo menos uma proposição matemática.[35]

Uma das vantagens do modelo dedutivo é de que o modelo contorna os problemas a respeito da causalidade, porque o modelo dedutivo é silencioso sobre a causalidade no processo explicativo. Aparentemente, à luz deste modelo, uma EEM pode ser causal ou não-causal. A caracterização de uma explicação, a respeito do seu carácter causal depende apenas da natureza das proposições que são invocadas no *explanans*. Se são

35 Também propus um modelo DN para as EEM em Castro (2020b).

invocadas leis da natureza causais, a par de proposições matemáticas, a explicação será causal. Se são apenas invocadas proposições matemáticas, a par de condições iniciais, então a explicação será não-causal.

O problema de assimetria é um dos grandes problemas para o modelo original de Hempel e, naturalmente, o problema estende-se às EEM. A inclusão de proposições matemáticas no *explanans*, a par de leis da natureza, não atenua as dificuldades que o problema levanta. As proposições matemáticas são acausais e os objectos de quantificação empíricos são irrelevantes, dado o carácter abstracto das mesmas. Assim, no exemplo mastro/sombra, as leis geométricas podem ser usadas para explicar o comprimento da sombra do mastro, considerando a condição inicial da altura do mastro, mas também podem ser usadas para explicar o comprimento do mastro, considerando a condição inicial da sombra do mastro. Tanto quanto sei, na literatura não há qualquer resposta a este problema.[36]

Especulativamente, uma solução para o problema de assimetria consiste em adaptar parte da proposta de Lange a este modelo. Nomeadamente, o modelo dedutivo teria de incluir uma condição adicional segundo a qual os *explananda*, deduzidos a partir do *explanantia* respectivos, são modalmente mais fortes do que as proposições causais ordinárias, ou seja, são necessidades matemáticas. Assim, por exemplo, o comprimento da sombra do mastro é uma necessidade que se segue de leis geométricas e da altura do mastro, mas o comprimento do mastro não é uma necessidade, ainda que possa ser deduzido de leis geométricas e da sombra do mastro.

Finalmente, os problemas de genuinidade e de relevância também são problemas agudos para os modelos dedutivos das EEM. O problema de genuinidade, da distinção entre as EEM e as ECM, surge nos modelos dedutivos para as EEM, porque o modelo original (modelo DN) nunca encontrou motivação para estabelecer qualquer distinção entre as EEM e as ECM (ver posição de Hempel, na introdução deste artigo). O problema de relevância surge na medida em que num qualquer argumento dedutivo podem ser acrescentadas premissas matemáticas

36 Quer Baron, quer Molinini, são omissos sobre o assunto.

irrelevantes ao *explanans* e continuar a deduzir a mesma conclusão.

Baron (2019) tenta resolver ambos os problemas. Para o problema de genuinidade propõe a restrição seguinte:

> Uma asserção não-matemática *P* é essencialmente dedutível de um conjunto de premissas *S*, que inclui pelo menos uma proposição matemática *M*, apenas quando existe uma derivação sólida de *P* a partir de *S*, ou não existe nenhuma derivação sólida de *P* a partir de um conjunto de premissas *S** que inclui apenas proposições físicas, ou todas as derivações sólidas de conjuntos de premissas $S_1 \ldots S_n$, cada um dos quais inclui apenas proposições físicas são piores do que a derivação matemática. (Baron 2019: sec. 4)[37]

A propósito da explicação, digamos, do tempo de viagem no voo Paris-Porto, que recorre ao uso de matemática, à luz da restrição de Baron, resultaria que uma explicação apenas baseada em proposições físicas seria uma explicação pior do que a explicação acima apresentada baseada em matemática. Ora, acontece que este procedimento não é propriamente uma trivialidade. As ciências empíricas estão repletas de matemática. Não é evidente como se podem formular explicações alternativas, às explicações correntes, completamente extirpadas de cálculos matemáticos. Em particular, Baron não fornece um exemplo concreto de explicação que ilustra esta possibilidade.

Finalmente, para o problema de relevância, Baron argumenta que a lógica que governa os argumentos dedutivos explicativos não é a lógica clássica, mas sim uma lógica alternativa chamada de lógica *relevante*. Segundo esta lógica, $\Gamma \rightarrow \Delta$ apenas se Γ é relevante para Δ; Δ; $\Gamma \vdash \Delta$ apenas se Γ é relevante para Δ. Naturalmente, a discussão sobre esta solução incide sobre a legitimidade da lógica relevante para a apreciação de argumentos dedutivos explicativos.[38]

Conclusão

Há duas linhas de força na análise da explicação científica. Uma linha de força pretende estabelecer modelos globais para a explicação

37 Na verdade, a proposta de Baron tem 'epiciclos' adicionais, mas estes 'epiciclos' não intersectam a validade da minha crítica.

38 O leitor pode consultar o artigo de Baron (2019) se pretender obter mais detalhes sobre a lógica relevante, bem como acerca da discussão em volta da sua legitimidade.

científica que cubram sob um mesmo arco toda a ciência. Outra linha de força pretende estabelecer modelos locais para cada uma das ciências particulares. A abordagem deste artigo percorreu pronunciadamente a segunda linha de força dividindo a explicação matemática em explicações internas e explicações externas.

A explicação científica ordinária, a explicação extra-matemática e a explicação intra-matemática podem ser ordenadas pelo seu grau de afinidade epistémica. Primeira, a explicação científica ordinária é exclusivamente empírica. Segunda, a explicação extra- matemática é parcialmente empírica e parcialmente matemática. Terceira, a explicação intra-matemática é exclusivamente matemática. Dada esta ordenação epistémica, à primeira vista, a modelização da explicação extra-matemática estaria em condições de desempenhar um papel charneira relativamente às outras duas explicações, porque este tipo de explicação partilha características epistémicas com as outras duas explicações. Ora, como foi possível verificar neste artigo, tal papel charneira para a explicação extra- matemática não se verifica de todo na literatura. Ou os modelos para a explicação extra- matemática são derivados da explicação científica ordinária e não cobrem a explicação intra-matemática (modelo modal de Lange e modelos abstractos de Lyon e Pincock e modelo dedutivo de Baron), ou são derivados da explicação intra-matemática e não cobrem a explicação científica ordinária (modelo dedutivo de Steiner).

Curiosamente, alguma literatura tem procurado endereçar, sob um mesmo modelo, os dois tipos de explicação epistemicamente mais afastados – a explicação científica ordinária e a explicação intra-matemática –, mas obliterando a explicação extra-matemática. Por exemplo, Kitcher propôs um modelo original de unificação que endereça sob um mesmo arco a explicação científica ordinária e a explicação intra-matemática (Kitcher 1989: 437).[39] Frans e Weber (2014) estenderam o modelo mecanicista à explicação

39 O modelo de unificação de Kitcher foi outrora analisado no artigo 'Explicação Científica' deste Compêndio. Seria assim repetitivo estar a abordar este modelo. Acresce que a parte respeitante às explicações intra-matemática, não foi muito detalhada pelo autor e tem sido pouco discutida na literatura. Tanto quanto sei, apenas um par de artigos discutem o modelo a respeito deste domínio restrito (Tappenden 2005; Hafner e Mancosu 2008).

intra-matemática. Resnik e Kushner (1987) estenderam o modelo *questões- porquê?* de Bas van Fraassen à explicação intra-matemática.

A explicação intra-matemática está epistemicamente muito afastada da explicação científica ordinária: a primeira é exclusivamente acerca do abstracto; a segunda é exclusivamente acerca do concreto; a primeira não tem exemplares consensuais; a segunda tem um vasto repositório histórico de exemplares; a primeira é exclusivamente acerca de um processo dedutivo; a segunda pode ser acerca de processos dedutivos, indutivos e de outras inferências diversas, como inferências para a melhor explicação. Por isso, tenho reservas a respeito das tentativas de conciliar debaixo de um mesmo modelo explicações tão epistemicamente diferentes. Tais modelos ficaram excluídos deste artigo.[40]

Eduardo Castro
Departamento de Matemática, Universidade da Beira Interior
LanCog Group, Centro de Filosofia da Universidade de Lisboa.

Referências

Almgren, Frederick, e Taylor, Jean. 1976. The Geometry of Soap Films and Soap Bubbles. *Scientific American* 235 (1): 82–93.

Aristotle. 1984. *The Complete Works of Aristotle the Revised Oxford Translation*. Editado por Jonathan Barnes. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Baker, Alan. 2005. Are there Genuine Mathematical Explanations of Physical Phenomena? *Mind* 114 (454): 223–238. doi:10.1093/mind/fzi223.

Baker, Alan. 2010. Mathematical Induction and Explanation. *Analysis* 70 (4): 681–689.

Baron, Sam. 2019. Mathematical Explanation by Law. *The British Journal for the Philosophy of Science* 70 (3): 683–717. doi:10.1093/bjps/axx062.

Bouligand, Georges. 1933. L'idée de causalité en mathématiques et dans quelques théories physiques. *Revue Scientifique* 71 (9): 257–267.

Bromberger, Sylvain. 1966. Why-Questions. In *Mind and Cosmos: Essays in Contemporary Science and Philosophy,* editado por Robert Colodny, Pittsburgh: University of Pittsburgh Press, 86–111.

Brown, James Robert. 1997. Proofs and pictures. *British Journal for the Philosophy of Science* 48 (2): 161. doi:10.1093/bjps/48.2.161.

Castro, Eduardo. 2017. Problemas para a Explicação Matemática. *Revista Portuguesa de Filosofia* 73 (3/4): 1437–1462. doi:10.17990/RPF/2017_73_3_1437.

Castro, Eduardo. 2020a. Explicação Científica. In *Compêndio em Linha de Problemas de Filosofia Analítica*, editado por Pedro Galvão e Ricardo Santos. Lisboa: Centro de Filosofia da Universidade de Lisboa.

40 Estou muito agradecido a Gonçalo Santos os comentários a uma versão deste artigo.

Castro, Eduardo. 2020b. A Deductive-Nomological Model for Mathematical Scientific Explanation. *Principia: An International Journal of Epistemology* 24 (1): 1–27.doi:10.5007/1808-1711.2020v24n1p1.

Colyvan, Mark. 2012. *An Introduction to the Philosophy of Mathematics.* Cambridge: Cambridge University Press.

Craver, Carl F., e Povich, Mark. 2017. The Directionality of Distinctively Mathematical Explanations. *Studies in History and Philosophy of Science Part A* 63: 31–38. doi:10.1016/j.shpsa.2017.04.005.

D'Alessandro, William. 2019. Explanation in Mathematics: Proofs and Practice. *Philosophy Compass* 14 (11): e12629. doi:10.1111/phc3.12629.

Dougherty, John. 2018. What Inductive Explanations Could Not Be. *Synthese* 195 (12): 5473–5483. doi:10.1007/s11229-017-1457-1.

Frans, Joachim e Weber, Erik. 2014. Mechanistic Explanation and Explanatory Proofs in Mathematics. *Philosophia Mathematica* 22 (2): 231–248. doi:10.1093/philmat/nku003.

Hafner, Johannes, e Mancosu, Paolo. 2008. Beyond Unification. In *Philosophy of Mathematical Practice*, editado por Paolo Mancosu. New York: Oxford University Press, 151–178.

Hempel, Carl. 1964. On the Nature of Mathematical Truth. In *Philosophy of Mathematics*, editado por Hilary Putnam e Paul Benacerraf. Cambridge, Mass.: Cambridge University Press, 377–393

Hempel, Carl. 1965. *Aspects of Scientific Explanation and Other Essays in the Philosophy of Science*. New York: The Free Press.

Hempel, Carl. e Oppenheim, Paul. 1948. Studies in the Logic of Explanation. *Philosophy of Science* 15 (2): 135–175.

Hoeltje, Miguel, Schnieder, Benjamin e Steinberg, Alex. 2013. Explanation by Induction? *Synthese* 190 (3): 509–524. doi:10.1007/s11229-011-0045-z.

Jackson, Frank, e Pettit, Philip. 1990. Program Explanation: A General Perspective. *Analysis* 50 (2): 107–117. doi:10.2307/3328853.

Kitcher, Philip. 1975. Bolzano's ideal of algebraic analysis. *Studies in History and Philosophy of Science Part A* 6 (3): 229–269. doi:10.1016/0039-3681(75)90024-2.

Kitcher, Philip. 1989. Explanatory Unification and the Causal Structure of the World. In *Scientific Explanation*, editado por Wesley Salmon e Philip Kitcher. Minneapolis: University of Minnesota Press, 410–505.

Lange, Marc. 2009. Why Proofs by Mathematical Induction are generally not Explanatory. *Analysis* 69 (2): 203–211. doi:10.1093/analys/anp002.

Lange, Marc. 2013. What Makes a Scientific Explanation Distinctively Mathematical? *British Journal for the Philosophy of Science* 64 (3): 485–511.

Lange, Marc. 2014. Aspects of Mathematical Explanation: Symmetry, Unity, and Salience. *Philosophical Review* 123 (4): 485–531. doi:10.1215/00318108-2749730.

Lange, Marc. 2016. *Because Without Cause: Non-Causal Explanations in Science and Mathematics*. New York: Oxford University Press.

Lange, Marc. 2018. A reply to Craver and Povich on the directionality of distinctively mathematical explanations. *Studies in History and Philosophy of Science Part A* 67: 85–88. doi:10.1016/j.shpsa.2018.01.002.

Lehet, Ellen. 2019. Induction and Explanatory Definitions in Mathematics. *Synthese*. doi:10.1007/s11229-019-02095-y.

Lewis, David. 1986. *Philosophical Papers:Volume II*. New York: Oxford University Press.

Lyon, Aidan. 2012. Mathematical Explanations of Empirical Facts, And Mathematical Realism. *Australasian Journal of Philosophy* 90 (3): 559–578.

Maddy, Penelope. 1990. *Realism in Mathematics.* Oxford: Oxford University Press.

Maddy, Penelope. 1997. *Naturalism in Mathematics*. New York: Oxford Universit Press.

Maddy, Penelope. 2005. Three Forms of Naturalism. In *The Oxford Handbook of*

Maddy, Penelope. 2007. *Second Philosophy - a Naturalistic Method.* Oxford: Oxford University Press.

Mancosu, Paolo. 1996. *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century.* New York: Oxford University Press.

Mancosu, Paolo. 2001. Mathematical Explanation: Problems and Prospects. *Topoi* 20 (1): 97–117. doi:10.1023/A:1010621314372.

Mancosu, Paolo, e J. Hafner. 2006. The Varieties of Mathematical Explanation. In *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics,* editado por Paolo Mancosu, Klaus Frovin Jørgensen, e S. A. Pedersen, 215–250. Dordrecht: Springer.

Mill, John. 1843. *A System of Logic*. London: Parker.

Molinini, Daniele. 2014. Deductive Nomological Model and Mathematics: Making Dissatisfaction more Satisfactory. *THEORIA. An International Journal for Theory, History and Foundations of Science* 29 (2): 223–241. doi:10.1387/theoria.6464.

Pincock, Christopher. 2015. Abstract Explanations in Science. *British Journal for the Philosophy of Science* 66 (4): 857–882. doi:10.1093/bjps/axu016.

Poincaré, Henri. 1968. *La Science et l'Hypothèse.* Paris: Flammarion.

Poincaré, Henri. 1970. *La Valeur de la Science*. Paris: Flammarion.

Polya, G. 1968. *Mathematics and Plausible Reasoning: Patterns of Plausible Reasoning.* Vol. 2. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Resnik, Michael D. e David, Kushner. 1987. Explanation, Independence and Realism in Mathematics. *The British Journal for the Philosophy of Science* 38 (2): 141–158.

Reutlinger, Alexander, e Holly Andersen. 2016. Abstract versus Causal Explanations? *International Studies in the Philosophy of Science* 30 (2): 129–146. doi:10.1080/02698595.2016.1265867.

Saatsi, Juha. 2012. Mathematics and Program Explanations. *Australasian Journal of Philosophy* 90 (3): 579–584. doi:10.1080/00048402.2012.665374.

Salmon, Wesley. 1984. *Scientific Explanation and the Causal Structure of the World*. Princeton: Princeton University Press.

Salmon, Wesley. 1989. *Four Decades of Scientific Explanation.* Pittsburgh: University of Pittsburgh Press.

Steiner, Mark. 1978a. *Mathematical Explanation*. Philosophical Studies 34 (2): 135–151.

Steiner, Mark. 1978b. Mathematics, Explanation, and Scientific Knowledge. *Noûs* 12 (1): 17–28. doi:10.2307/2214652.

Tappenden, Jamie. 2005. Proof Style and Understanding in Mathematics I: Visualization, Unification and Axiom Choice. In *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics*, ed. por Paolo Mancosu, Klaus Frovin Jørgensen, e Stig Andur Pedersen. Dordrecht: Springer, 147–214.

Taylor, Jean E. 1976. The Structure of Singularities in Soap-Bubble-Like and Soap-Film- Like Minimal Surfaces. *Annals of Mathematics* 103 (3): 489–539. doi:10.2307/1970949.

van Fraassen, Bas. 1980. *The Scientific Image*. New York: Oxford University Press.

Woodward, James. 2003. *Making Things Happen: A Theory of Causal Explanation*. New York: Oxford University Press.

Wysocki, Tomasz. 2017. Explanatory Circles, Induction, and Recursive Structures. Thought: *A Journal of Philosophy* 6 (1): 13–16. doi:10.1002/tht3.229.