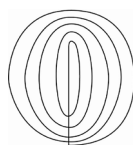


LOGICISMO

EDIÇÃO DE 2014

COMPÊNDIO EM LINHA DE PROBLEMAS DE FILOSOFIA ANALÍTICA

2012-2015 FCT Project PTDC/FIL-FIL/121209/2010



Editado por
João Branquinho e Ricardo Santos

ISBN: 978-989-8553-22-5

Compêndio em Linha de Problemas de Filosofia Analítica
Copyright © 2014 do editor
Centro de Filosofia da Universidade de Lisboa
Alameda da Universidade, Campo Grande, 1600-214 Lisboa

Logicismo
Copyright © 2014 do autor
Fernando Ferreira

DOI: <https://doi.org/10.51427/cfi.2021.0051>

Todos os direitos reservados

Resumo

Discute-se o programa logicista da aritmética proposto por Frege, descrevendo com algum detalhe o desenvolvimento fregiano da aritmética. O paradoxo de Russell fez surgir uma nova forma de logicismo. Esta nova forma abandona a noção fregiana de objeto lógico, considera as classes como sendo ficções lógicas e substitui o sistema de Frege por uma teoria de tipos lógicos. Estas propostas são analisadas. Aborda-se também o programa neologicista (e abstracionista) de Hale e Wright e discutem-se brevemente versões predicativas do sistema fregiano original. O escrito termina com algumas considerações sobre o programa neologicista.

Palavras-chave

Aritmética fregiana, Paradoxo de Russell, Tipos lógicos, Neologicismo, Predicatividade

Abstract

We discuss Frege's logicist programme and describe in some detail Frege's development of arithmetic. Russell's paradox gave rise to a new form of logicism. This new form abandons the Fregean notion of logical object, considers classes as logical fictions and replaces Frege's system by a theory of logical types. These proposals are discussed. We also discuss the neologicist (and abstractionist) programme of Hale and Wright and discuss briefly predicative versions of the original Fregean system. The paper finishes with some considerations about the neologicist programme.

Keywords

Fregean arithmetic, Russell's paradox, Logical types, Neologicism, Predicativity

Logicismo

DOI: <https://doi.org/10.51427/cfi.2021.0051>

1 A lógica de Frege e o operador de extensão

O logicismo é a tese de que as verdades da matemática são verdades lógicas enunciadas por meio de frases que usam apenas vocabulário lógico. O logicismo foi defendido por Gottlob Frege no final do século XIX no que diz respeito às verdades da aritmética e da análise matemática (mas não no que diz respeito às verdades da geometria). A defesa de Frege não se cingiu apenas a uma posição que reavivava (contra Kant) a posição leibniziana de que as verdades da aritmética são exclusivamente produtos da razão pura, mas deu-lhe uma forma bastante particular: as verdades aritméticas e da análise são verdades de natureza lógica e, importantemente, Frege embarcou no projeto de o mostrar de forma rigorosa e sistemática. Este último ponto é crucial. Ao tentar mostrar *como* a matemática se reduz à lógica, Frege – para além de nos legar contribuições imorredouras (como é o caso da formalização numa forma do cálculo de predicados quantificacional) e ideias, técnicas e distinções de grande interesse – deixou-nos também uma base sobre a qual se podem colocar questões importantes que, de outra maneira, dificilmente surgiriam. No presente artigo, o leitor dar-se-á conta da influência que os escritos técnicos de Frege ainda têm hoje em dia.

Frege formalizou a lógica sobre a qual assenta o seu programa logicista na sua célebre publicação intitulada *Begriffsschrift* (notação conceptual) em 1879. Cinco anos mais tarde publica *Die Grundlagen der Arithmetik*, uma obra expositória e não técnica de introdução ao logicismo. O *magnum opus* de Frege, o *Grundgesetze der Arithmetik*, surge em dois volumes nos anos de 1893 e 1903. Nesta obra Frege desenvolve, de maneira rigorosa, a aritmética e partes da análise real a partir de certos princípios lógicos. Vários comentadores (p. ex. Gödel (1944)) observaram que o rigor da apresentação excede o posterior *Principia Mathematica* de Bertrand Russell e Alfred North Whitehead. No que se segue vamos descrever, em traços gerais – mas com suficiente detalhe – a forma como Frege reduziu a aritmética à lógica. Usamos para isso uma notação simbólica moderna e

ignoramos certas peculiaridades do sistema fregiano.¹

O sistema de Frege baseia-se no cálculo de predicados clássico de segunda-ordem. Este sistema estende a familiar lógica de primeira-ordem (com igualdade) por meio dum novo domínio de significância: para além do domínio dos objetos, sobre o qual se pode quantificar, admite-se agora também um domínio de conceitos sobre o qual também se pode fazê-lo. Do ponto de vista do cálculo temos variáveis para símbolos relacionais de várias aridades: F , G , H , etc. São as variáveis de segunda-ordem (reservamos as letras minúsculas latinas do fim do alfabeto x , y , z , etc para as variáveis de primeira-ordem).² Através destas novas variáveis e respetivas quantificações podemos exprimir de maneira lógica noções que não estão ao alcance da linguagem da lógica de primeira-ordem. Uma noção, central para Frege, é a de equinumericidade: um conceito (unário) F diz-se *equinúmero* ao conceito (unário) G , e escreve-se $F \text{ eq } G$, se

$$\exists R [\forall x(F(x) \rightarrow \exists^1 y(G(y) \wedge R(x,y))) \wedge \forall y(G(y) \rightarrow \exists^1 x(F(x) \wedge R(x,y)))].$$

Esta fórmula diz que existe uma relação binária R que estabelece uma correspondência biunívoca entre os objetos que caem sob o conceito F e os objetos que caem sob o conceito G . Note-se que a existência da relação binária R exprime-se através duma quantificação de segunda-ordem, enquanto que a formulação de que esta relação é biunívoca exprime-se na linguagem de primeira-ordem

¹ Eis três peculiaridades do sistema fregiano (cf. Frege 2013). O sistema tem um operador de descrição definida que, modernamente, é supérfluo (pois as descrições definidas podem sempre ser removidas em contexto como se mostra em Russell 1905). As frases em Frege têm referência, nomeadamente para os seus valores de verdade. Estes valores de verdade são objetos lógicos: o Verdadeiro e o Falso. Finalmente, o operador de extensão é um caso particular dum operador fregiano mais lato que associa a cada função de objetos para objetos um objeto denominado de *curso de valores* (“*Werthverlauf*”). O caso das extensões é um caso particular desta associação pois, para Frege, um conceito é uma função de objetos para os dois objetos lógicos Verdadeiro e Falso.

² Frege também fala em conceitos de conceitos (portanto de entidades de uma ordem ainda mais elevada) mas a dedução fregiana da aritmética pode ser feita no enquadramento da lógica de segunda-ordem e é isso que faremos aqui. De ora em diante, vamos reservar a palavra conceito para ‘conceito unário’, como é costume.

com igualdade (a igualdade ocorre nos quantificadores de existência e unicidade). As regras da lógica pertinentes para as quantificações de segunda-ordem seguem o padrão das regras de primeira-ordem e há apenas a realçar o modo como opera a regra de eliminação do quantificador universal de segunda-ordem: de uma quantificação da forma $\forall F(\dots F(t) \dots)$ pode deduzir-se $\dots \theta(t/x) \dots$ para qualquer fórmula da linguagem $\theta(x)$ (aqui, ' $\theta(t/x)$ ' obtém-se da fórmula ' $\theta(x)$ ' substituindo as ocorrências da variável x pelo termo de primeira-ordem t ; supõe-se, naturalmente, que não há conflitos de variáveis). As reticências indicam um contexto onde a fórmula $F(t)$ ocorre. Há uma correspondente regra para a quantificação existencial de segunda-ordem. Esta regra permite estabelecer a seguinte forma de compreensão para conceitos: $\exists F \forall x(F(x) \leftrightarrow \theta(x))$, onde ' $\theta(x)$ ' é uma fórmula qualquer da linguagem (em que ' F ' não ocorre). Esta forma de compreensão permite ver cada fórmula ' $\theta(x)$ ' como definindo um conceito F que faz parte do domínio de quantificação de segunda-ordem.

O cálculo acima descrito é trivialmente consistente, pois a estrutura com um só objeto e com dois conceitos (o vazio e o universal) é modelo do cálculo. A redução da aritmética à lógica necessita dum ingrediente adicional. Para Frege, esse ingrediente extra é a faculdade de poder passar sempre de um conceito para a sua extensão. Frege considera as extensões dos conceitos como *objetos lógicos*. No seu cálculo, Frege introduz um *operador* que associa a cada fórmula ' $\theta(x)$ ' um termo de primeira-ordem ' $\{x: \theta(x)\}$ '. Do ponto de vista semântico, Frege associa a cada conceito um objeto: a sua extensão. Este operador é regido axiomáticamente pela célebre Lei Básica V de Frege:

$$\forall F \forall G [\{x: F(x)\} = \{x: G(x)\} \leftrightarrow \forall x(F(x) \leftrightarrow G(x))].$$

A Lei Básica V diz que dois conceitos têm a mesma extensão exatamente no caso em que ambos os conceitos são co-extensivos (no sentido em que são verdadeiros dos mesmos objetos).

2 A dedução fregiana da aritmética

A lógica subjacente ao logicismo fregiano é a lógica de segunda-ordem munida do operador de extensão e da Lei Básica V. Podemos

dividir o desenvolvimento da aritmética de Frege em duas partes. Na primeira parte, Frege *define* um operador de cardinalidade que associa a cada conceito F o número de elementos que cai sob F e deduz o denominado *princípio de Hume*³; na *segunda* parte, Frege introduz as noções básicas da aritmética e demonstra os princípios fundamentais desta disciplina.

Do ponto de vista sintático, o operador que Frege define associa a cada fórmula ' $\theta(x)$ ' um termo de primeira-ordem ' $\#x.\theta(x)$ '. O princípio de Hume é

$$\forall F \forall G [\#x.F(x) = \#x.G(x) \leftrightarrow F \text{ eq } G],$$

e diz que o número de elementos que caem sob F é o mesmo do que o número de elementos que caem sob G se, e somente se, os conceitos F e G são equinumerícos. O operador de cardinalidade é, em Frege, *definido* à custa do operador de extensão. Famosamente, Frege define o número de elementos que caem sob um conceito F como sendo a extensão do conceito sob o qual caem as extensões de conceitos equinumerícos com F . Formalmente:

$$\#x.F(x) =_{\text{def}} \{z: \exists G(F \text{ eq } G \wedge z = \{y: G(y)\})\}.$$

Note-se que o número de objetos que caem sob um dado conceito F , o número $\#x.F(x)$, é uma extensão e, portanto, um objeto (lógico). De seguida, Frege demonstra o princípio de Hume. Nesta dedução, Frege emprega a lógica de segunda-ordem e a Lei Básica V. O próximo passo consiste em introduzir as noções fundamentais da aritmética. Frege define o número 0 como sendo o número de elementos que caem sob o conceito 'não ser idêntico a si próprio'. Formalmente, $0 =_{\text{def}} \#x.(x \neq x)$. Cada número natural pode ser definido *in concreto* da seguinte forma: $1 =_{\text{def}} \#x.(x=0)$, $2 =_{\text{def}} \#x.(x=0 \vee x=1)$, $3 =_{\text{def}} \#x.(x=0 \vee x=1 \vee x=2)$, etc. Estes números são objetos lógicos (são extensões) e são em número infinito. A infinitude de objetos não é postulada por Frege, é antes *deduzida*, graças à existência de objetos lógicos provenientes de extensões de conceitos.

Se bem que Frege tenha, nesta altura, cada número natural *in concreto*, tem também "números" infinitos (p. ex., $\#x.(x=x)$, o número de elementos do conceito universal) e, importantemente, não possui

³ É o próprio Frege (1992: §63) que atribui este princípio a David Hume.

ainda o conceito de número natural. Para definir este conceito é necessário considerar a noção de sucessor:

$$S(x,y) \equiv_{\text{def}} \exists F(y = \#z.F(z) \wedge \exists w(F(w) \wedge x = \#z.(F(z) \wedge z \neq w))),$$

(o objeto y é o sucessor do objeto x se y é o número de elementos que vem para um certo conceito F e x é o número de elementos que vem para esse conceito retirando-lhe um elemento). Frege demonstra facilmente que 0 não é o sucessor de nenhum objeto, que um objeto não pode ter mais do que um sucessor e que objetos diferentes não podem ter o mesmo sucessor. Para se obter a axiomática de Peano/Dedekind para a aritmética, resta mostrar que cada número *natural* tem sucessor e que vale o princípio da indução matemática.

A definição de número natural dada por Frege é puramente formal e não apela a nenhuma intuição de procedimento ilimitado em que, p. ex., se imagina que é sempre possível passar de um número para o seu sucessor. A ideia fundamental da definição (também devida a Richard Dedekind) ainda é hoje usada no desenvolvimento axiomático da teoria dos conjuntos. Para explicar esta ideia, deve-se introduzir a noção de conceito *hereditário* (para a noção de sucessor). Diz-se que o conceito F é hereditário se, sempre que um objeto x cai sobre F então, se y é sucessor de x , y também cai sob F :

$$\mathbf{Her}(F) \equiv_{\text{def}} \forall x \forall y (F(x) \wedge S(x,y) \rightarrow F(y)).$$

Um número natural é, por definição, um objeto que cai sob todos os conceitos hereditários que são verdadeiros de $\mathbf{0}$ (os chamados conceitos indutivos):

$$\mathbf{N}(x) \equiv_{\text{def}} \forall F [F(\mathbf{0}) \wedge \mathbf{Her}(F) \rightarrow F(x)].$$

Com esta definição, o princípio da indução matemática (o qual afirma que as propriedades indutivas são verdadeiras para todos os número naturais) deduz-se de forma imediata: $\forall F [F(\mathbf{0}) \wedge \mathbf{Her}(F) \rightarrow \forall x (\mathbf{N}(x) \rightarrow F(x))]$. Resta demonstrar que todo o número natural tem sucessor. Para isso, define-se a noção de “menor ou igual”:

$$x \leq y \equiv_{\text{def}} \forall F [F(x) \wedge \mathbf{Her}(F) \rightarrow F(y)]$$

(x é menor ou igual a y se y cai sob toda a propriedade hereditária que é verdadeira de x). Frege mostra que, para todo o número natu-

ral x , o objeto $\#z.(z \leq x)$ ainda é um número natural e que é o *sucessor* de x . Formalmente, $\forall x(N(x) \rightarrow S(x, \#z.(z \leq x)))$. O argumento usa o princípio de indução matemática de forma crucial. Do ponto de vista intuitivo (que não é o ponto de vista fregiano para a aceitação de verdades aritméticas), é óbvio que o número de elementos inferiores ou iguais a, digamos, 7 é 8 (note-se que se conta 0 como sendo um número natural).

O programa de Frege de redução da aritmética à lógica, introduzindo as noções aritméticas fundamentais em termos de nomenclatura lógica e deduzindo os princípios aritméticos fundamentais por meios lógicos, está completo.

3 O paradoxo de Russell

O sinal de pertença não é um símbolo primitivo no sistema lógico de Frege e, como vimos, o desenvolvimento da aritmética não precisa dele (cf. secção anterior). A noção de pertença pode, porém, ser definida. Frege deu-nos essa definição. Diz-se que x pertence a y , e escreve-se ' $x \in y$ ', se $\exists F(y = \{z: F(z)\} \wedge F(x))$. Esta definição revela de forma cristalina a visão logicista a respeito dos conjuntos: x pertence a y se, e somente se, y é a extensão de um conceito sob o qual x cai. Há, no logicismo, uma primazia dos conceitos em relação aos conjuntos. Um conjunto é sempre algo que advém dum conceito (em Frege, é sempre a extensão dum conceito). Com esta definição de "pertença", Frege demonstra o princípio da concreção:

$$\forall x(x \in \{z: \theta(z)\} \leftrightarrow \theta(x)),$$

onde ' $\theta(x)$ ' é uma fórmula qualquer da linguagem. Dado um objeto x , a demonstração do condicional da esquerda para a direita usa a Lei Básica V e o condicional inverso usa, para além desta lei, o princípio da compreensão para conceitos. Vamos analisar com algum detalhe o argumento para esta segunda asserção condicional. Suponhamos, por hipótese, que se tem $\theta(x)$. Pelo princípio da compreensão, existe um conceito F que é co-extensivo com θ (tem-se $F(x)$ como caso particular). Pela Lei Básica V, $\{z: \theta(z)\} = \{z: F(z)\}$. Logo, $\exists F(\{z: \theta(z)\} = \{z: F(z)\} \wedge F(x))$. Por definição de relação de pertença, isto quer dizer que $x \in \{z: \theta(z)\}$, como se queria.

Em junho de 1902, quando o segundo volume dos *Grundgesetze*

der Arithmetik já estava no prelo, Frege recebe uma carta de Bertrand Russell que apontava uma dificuldade no seu sistema lógico. Esta dificuldade revelou-se devastadora: o sistema lógico de Frege é inconsistente. Com efeito, considere-se o conceito de Russell definido por $R(z) \equiv_{\text{def}} z \notin z$. Pelo princípio da concreção, $\forall x(x \in \{z: R(z)\} \leftrightarrow R(x))$. Considere-se r a extensão de R , i. e., $r =_{\text{def}} \{z: R(z)\}$. Então, $\forall x(x \in r \leftrightarrow x \notin x)$. Em particular, $r \in r \leftrightarrow r \notin r$. Isto é uma contradição.

No posfácio do segundo volume dos *Grundgesetze der Arithmetik*, Frege escreve:

Mesmo hoje, não vejo como é que a aritmética pode ser fundamentada cientificamente, como é que os números podem ser apreendidos como objectos lógicos e trazidos à consideração, se não for permitido – nem que seja condicionalmente – passar dum conceito para a sua extensão. Pode sempre falar-se da extensão dum conceito, duma classe? Se não, como é que se reconhecem as exceções?

4 A teoria dos tipos de Russell e Whitehead

Frege acaba por renunciar à filosofia logicista. O prosseguimento da visão logicista da matemática cabe agora a Russell e Whitehead. A resposta de Russell à contradição ficou sistematizada no triplo volume *Principia Mathematica* (1910-1913) e pode ser descrita concisamente: *não há objetos lógicos*. Russell rejeita o operador de extensão e a ideia de que os conceitos têm extensões tomadas como sendo objetos (indivíduos, na terminologia de russelliana). Trata-se de uma resposta radical ao paradoxo (uma “no-classes theory”). O paradoxo é evitado porque não pode sequer ser formulado. Ainda assim, como veremos, o desenvolvimento da aritmética em Russell e Whitehead é efetuado seguindo linhas essencialmente fregianas. Surgem, porém, sérias dificuldades de natureza tanto técnica como filosófica.

A teoria de Russell é uma teoria de funções proposicionais. Estas funções tomam o papel dos conceitos em Frege. Do ponto de vista meramente técnico, trata-se apenas duma questão terminológica.⁴ Numa primeira abordagem, é mais simples encarar a teoria dos *Principia* como uma teoria de classes embora, em última análise, para

⁴ Mas não do ponto de vista filosófico pois, como discutimos na nota 1, para Frege um conceito é uma função de objetos para dois objetos lógicos – o Verdadeiro e o Falso – enquanto que para Russell uma função proposicional de

Russell as classes sejam meras ficções lógicas, sempre removíveis *no contexto* duma frase à custa de funções proposicionais. A noção de um objeto pertencer a uma classe reduz-se, por meio desta remoção sistemática, à noção de um objeto cair sob um certo conceito. Esta redução é efetuada de tal modo que as classes satisfaçam o axioma da extensionalidade (duas classes são a mesma se, e somente se, têm os mesmos elementos), como iremos discutir na próxima secção. A noção de ‘pertença’ pode generalizar-se de modo a também fazer sentido dizer que classes pertençam a classes de classes, classes de classes pertençam a classes de classes de classes, etc. Tal é obtido por meio de funções proposicionais cujos constituintes são eles próprios funções proposicionais: por exemplo, podemos considerar que a fórmula ‘ $\exists x\theta(x)$ ’ dá origem a uma função proposicional que vale para a função proposicional dada pela fórmula ‘ $\theta(x)$ ’ exatamente quando θ é instanciada. Em termos de classes, esta função proposicional dá origem à classe de todas as classes que têm pelo menos um objeto.

Há, em Russell, vários domínios de significância (ao contrário de Frege, que *necessita* de apenas dois: um para objetos, outro para conceitos). O domínio dos objetos (indivíduos), o domínio das classes de objetos, o domínio das classes de classes de objetos e por aí adiante.⁵ Estes domínios, ou *tipos*, estão na base da teoria dos tipos de Russell. Sob pena de me tornar demasiado insistente neste ponto, faço notar que em Frege uma classe de objetos (dada por um conceito) tem uma extensão e que essa extensão é um objeto, enquanto que para Russell isso não acontece e a classe nem é um objeto nem tem nenhum objeto como sucedâneo. As classes de objetos, em Russell, não são do mesmo tipo dos objetos: estão num tipo mais elevado (estão no patamar das funções proposicionais). Quando se escreve ‘ $x \in y$ ’ na teoria dos tipos está sempre a pressupor-se que o tipo da variável y é mais elevado do que o tipo da variável x . Em particular, têm domínios de significância diferentes. Assim, a fórmula ‘ $z \in z$ ’ não faz sentido em teoria dos tipos e, portanto, a sua negação ‘ $z \notin z$ ’ também não faz.

objetos é uma função de objetos para proposições (sendo estas, por sua vez, verdadeiras ou falsas).

⁵ Mesmo na teoria dos tipos simples (aquela que estamos a considerar nesta secção), o imbricamento dos domínios de significância é complicado, dado que também se consideram quantificações sobre relações.

Esta é a forma longa de se ver que o paradoxo de Russell não pode sequer ser formulado em teoria dos tipos.

Como é que Russell e Whitehead desenvolvem a aritmética na teoria dos tipos? Dada uma classe de objetos X , a definição do número de elementos de X é a classe de todas as classes equinúmericas (semelhantes, na terminologia de Russell (2007: cap. II)) a X . O paralelo com Frege é claro, mas o *tipo* do número é diferente: para Frege, o número que vem para X é um objeto, para Russell é uma classe de classes de objetos. O número 0 é o número de elementos da classe vazia de objetos (a classe associada ao conceito ‘não ser idêntico a si próprio’). Visto que só existe uma classe de objetos que é equinúmerica à classe vazia – a própria classe vazia – o número 0 é, nos *Principia*, a classe constituída somente pela classe vazia de objetos. O número 1 é, por sua vez, a classe de todas as classes com exatamente um objeto. Esta definição não é circular:

$$1 =_{\text{def}} \{X: \exists x(x \in X \wedge \forall z(z \in X \rightarrow z=x))\}$$

O número 2 é a classe de todas as classes com exatamente dois objetos. Novamente, esta definição não é circular:

$$2 =_{\text{def}} \{X: \exists x \exists y (x \in X \wedge y \in X \wedge x \neq y \wedge \forall z(z \in X \rightarrow z=x \vee z=y))\}$$

e por aí adiante. Tal como em Frege, podemos definir todos os números naturais *in concreto*. Um número é uma classe de equinumericidade (i. e., uma classe de classes equinúmericas a uma dada classe de objetos). Na definição de cada número natural em Russell e Whitehead (assim como em Frege) é transparente a ligação dos números à cardinalidade duma classe: p. ex., uma classe de objetos X tem exatamente dois elementos se, e somente se, $X \in 2$. Frege apenas conta objetos mas, derivadamente também pode contar classes através das suas extensões. Dado que não há extensões (tomadas como objetos) nos *Principia*, este modo de contar classes não está disponível para Russell e Whitehead. Quando é que uma classe de classes de objetos tem dois elementos? Claramente, quando essa classe for constituído exatamente por duas classes (de objetos), condição esta que se pode formular sem circularidade pelo método descrito acima. O número 2 correspondente é a classe de todas as classes com dois elementos, em que estes elementos são agora eles próprios classes (de objetos). Necessariamente, a doutrina dos tipos lógicos conduz a que

cada número natural tenha uma contrapartida para cada tipo. Há um número 2 para quando se contam objetos, um número 2 para quando se contam classes de objetos, um número 2 para quando se contam classes de classes de objetos, etc. Esta consequência da doutrina dos tipos lógicos, se bem que bizarra, não é fatal para o programa logicista. Russell recomenda que este género de fenómeno seja tratado por meio duma *ambiguidade típica* (não interessa realmente em que tipo lógico estamos, apenas interessa a posição relativa dos tipos com que lidamos).

O desenvolvimento russelliano da aritmética põe, contudo, um problema muito sério para o logicismo. Suponhamos que há apenas um único objeto (indivíduo). Neste caso, o número 2 (que é a classe das classes com exatamente dois objetos) é a classe vazia, visto que não há classes com dois objetos. O mesmo aconteceria com o número 3 e com todos os números subsequentes. Viria $2=3$, $2=4$, etc. Este género de problema surge sempre no caso em que o universo de indivíduos é finito. Russell e Whitehead são obrigados a postular o *axioma do infinito*, segundo o qual há uma infinidade de objetos (indivíduos). Esta postulação é extremamente insatisfatória do ponto de vista logicista pois aceita um axioma que não é de carácter lógico. É uma contingência haver, ou não, um número infinito de indivíduos. A menos que, como Frege, se aceitem objetos lógicos. Dado que este caminho está vedado a Russell e Whitehead, resta-lhes *postular* o axioma do infinito. Para tornar palatável esta manobra, sugerem que se condicione cada asserção aritmética antecedendo-a com o axioma do infinito. Assim, a teoria dos tipos não demonstra que $2 \neq 3$ *simpliciter*, demonstra o condicional ' $AxInf \rightarrow 2 \neq 3$ ' (aqui, *AxInf* é o axioma do infinito). Em geral, um teorema aritmético ' ψ ' é, em Russell, tomado como sendo ' $AxInf \rightarrow \psi$ '. A aritmética deixa de ser incondicionada, estando sistematicamente dependente de uma hipótese de carácter não lógico.

O desenvolvimento da aritmética nos *Principia* faz-se de modo análogo ao de Frege, com as diferenças decorrentes dos números serem agora classes de classes ao invés de objetos. A noção de número natural é definida também através da noção de hereditariedade (aqui aplicada a propriedades de números, i. e., de certas classes de classes) e a existência de sucessor com as propriedades usuais da aritmética depende essencialmente do axioma do infinito. Não vale a pena

detalhar este desenvolvimento da aritmética. Será mais interessante explorar as tensões que advêm do programa logicista de Russell e Whitehead.

5 Tensões do projeto logicista de Russell

Certas opções técnicas de Russell sugerem uma visão anti-realista no que diz respeito a classes e funções proposicionais. Como dissemos, para Russell as classes são ficções lógicas, removíveis em termos de funções proposicionais (Russell (2007: cap. xvii)). Estas últimas, por sua vez, são tratadas de modo predicativo (iremos esclarecer o que isto significa), o que é uma indicação de anti-realismo. Os motivos para tomar a opção predicativa não são, porém, diretamente motivados por uma visão anti-realista mas sim por um certo diagnóstico, de carácter geral, dos vários paradoxos que surgiram na matemática na viragem do século XIX para o século XX. Um conceito diz-se definido *impredicativamente* se é definido à custa duma totalidade do qual faz parte. Tipicamente, na definição impredicativa dum dado conceito ocorrem quantificações cujo domínio de variação inclui o próprio conceito que se está a definir. Esta situação é vista como um *círculo vicioso* e, de acordo com Russell, os paradoxos surgem por se incorrer em tais circularidades. Um exemplo importante é a definição Fregeana do conceito de número natural. Na definição que apresentámos na Secção 2, um objeto x é um número natural se cai sob todos os conceitos indutivos. Ora, o conceito de ser número natural é – ele próprio – indutivo. Numa visão anti-realista dos conceitos surge aqui um círculo inadmissível porque os conceitos são vistos como entidades que se constroem por meio de definições (não constituindo um domínio ontológico independente das nossas construções) e, portanto, a definição dum conceito não pode depender do conceito que se está a definir. Já para um realista (acerca de conceitos) uma definição impredicativa não coloca problemas especiais porque se resume a uma maneira de designar (através duma descrição) um certo conceito: p. ex., o conceito constituído pelos elementos que caem sob todos os conceitos indutivos. Frege aceita a definição impredicativa de número natural mas Russell repudia-a tal como está.

De acordo com Russell, a teoria dos tipos lógicos atrás descrita (a teoria dos tipos *simples*) não é suficientemente refinada e deve ser

complementada. Considere-se um certo tipo lógico T . De acordo com a teoria dos tipos simples, todos os conceitos (funções proposicionais unárias) de elementos de tipo T co-existem num só tipo: o tipo dos conceitos que se aplicam a elementos de tipo T . Na linguagem das classes, isso significa que todas as classes formadas por elementos de tipo T co-existem num só tipo. Na visão *ramificada* de Russell isto não se passa assim. Os conceitos que se aplicam a elementos de tipo T subdividem-se por vários níveis (tipos) de acordo com a seguinte ideia: existem, em primeiro lugar, os conceitos *predicativos* ou de nível 0, aqueles em cujas definições não ocorrem quantificações sobre conceitos (de elementos de tipo T); depois vêm os conceitos de nível 1, aqueles em cujas definições já se permitem quantificações sobre conceitos (de elementos de tipo T), mas restritas a conceitos de nível 0; depois, temos os conceitos de nível 2, que permitem definições em que entram quantificações sobre conceitos de nível 0 ou 1; e por aí a diante. Tomemos, como exemplo, os conceitos (funções proposicionais unárias) que se aplicam a números. De acordo com a teoria ramificada de Russell, estes conceitos espraiam-se por vários níveis (tipos). Denotemos por F^n , G^n , H^n , etc as variáveis para conceitos de nível n . Podemos definir o conceito de número natural do seguinte modo:

$$N(x) \equiv_{\text{def}} \forall F^0 [F^0(0) \wedge \forall x \forall y (F^0(x) \wedge S(x,y) \rightarrow F^0(y)) \rightarrow F^0(x)].$$

Esta definição segue a dada na Secção 2 (escrita de forma não abreviada) mas qualificando as quantificações de conceitos como sendo sobre conceitos de nível 0. O conceito definido $N(x)$, “ x é número natural”, é agora um conceito de nível 1 e, por conseguinte, a circularidade da definição é evitada. Há, porém, um preço muito caro a pagar pela ramificação: o princípio da indução matemática não vale em geral. Apenas se consegue demonstrar o princípio de indução para conceitos de nível 0. Formalmente, demonstra-se:

$$\forall F^0 [F^0(0) \wedge \forall x \forall y (F^0(x) \wedge S(x,y) \rightarrow F^0(y)) \rightarrow \forall x (N(x) \rightarrow F^0(x))].$$

Em particular, os conceitos para os quais o princípio de indução vale (os conceitos de nível 0) não podem mencionar o próprio conceito de número natural (que é de nível 1). Esta restrição paralisa o desenvolvimento da aritmética. Não vale a pena tentar modificar a

definição de número natural de modo a permitir quantificações sobre conceitos de nível 1, pois o problema voltaria a surgir dado que o conceito de número natural passaria a ser de nível 2. A tentativa de abarcar toda a indução matemática numa linguagem ramificada é como tentar apanhar a própria sombra.

A receita de Russell para torneir este obstáculo é aceitar o *axioma da redutibilidade*.⁶ No caso em discussão, o axioma toma a forma esquemática $\forall F^n \exists H^0 \forall x (H^0(x) \leftrightarrow F^n(x))$: postula-se que todo o conceito é co-extensivo a um conceito predicativo. Com este axioma tem-se o princípio de indução matemática irrestrito e pode-se desenvolver cabalmente a aritmética. Russell adota a notação exclamativa ‘ $\phi!(x)$ ’ para indicar que a função proposicional é predicativa. Com esta notação (e fazendo uso da ambiguidade típica), o axioma da redutibilidade toma a seguinte forma: $\forall \psi \exists \phi! \forall x (\phi!(x) \leftrightarrow \psi(x))$. Como é claro, este axioma desfaz a opção predicativa. Deixa de haver um rumo filosófico firme e claro em Russell. As razões aduzidas por Russell para aceitar o axioma da redutibilidade são meramente pragmáticas: “conduz aos resultados desejados e a nenhuns outros” (Russell e Whitehead 1997: xiv). Estamos muito longe duma visão logicista.

A tensão entre a opção aparentemente anti-realista a respeito das funções proposicionais e a admissão do axioma da redutibilidade não fica, porém, por aqui. Russell não só é levado a aceitar *de facto* definições impredicativas como também parece ser conduzido a uma visão quasi-combinatorial das funções proposicionais, debaixo da qual se admite a existência de conceitos e relações que não são dadas por nenhuma definição, seja ela de natureza predicativa ou não. Estou a pensar no chamado *axioma da multiplicidade* (também conhecido por axioma da escolha). Este axioma é importante para o desenvolvimento de certas partes da matemática (mas não da aritmética). Numa sua formulação, o axioma da escolha afirma que, se se tiver uma classe de classes não vazias, mutuamente exclusivas, então existe uma classe que tem exatamente um elemento em comum com cada uma das

⁶ No apêndice B da segunda edição dos *Principia Mathematica*, Russell argumenta erradamente que o axioma da redutibilidade não é necessário para desenvolver a aritmética (de qualquer modo, seria-o para desenvolver a análise matemática dos números reais). Devemos a Gödel 1944 o apontamento deste *faux pas* de Russell.

classes não vazias dadas. Podemos ver esta classe como o produto de uma escolha ou seleção de um elemento de cada uma das classes não vazias dadas. O axioma da escolha é um postulado de existência particularmente depurado pois afirma a existência duma classe que goza de determinada propriedade (ser uma seleção adequada de elementos) sem dar, ou indicar, um modo de a definir. Dum ponto de vista quasi-combinatorial, a existência de classes seletoras é justificável pois, intuitivamente, pode escolher-se um elemento de cada classe não vazia dada e combiná-los todos numa só classe. Porém, este argumento baseia-se numa certa conceção de classe, não sendo um argumento que decorra logicamente de princípios lógicos. O apelo à conceção quasi-combinatorial de classe e concomitantes intuições não pode contentar um logicista.

A necessidade de postular os axiomas do infinito, da redutibilidade e da multiplicidade debilitaram grandemente o projeto logicista de Russell e Whitehead ao ponto de hoje não ter praticamente aderentes. Antes de passar para a próxima secção e descrever uma versão enfraquecida e modificada do logicismo, atualmente com alguns seguidores, gostaria ainda de abordar sucintamente o modo como Russell trata as classes como ficções lógicas.

De acordo com a visão logicista, uma classe advém sempre dum conceito (função proposicional). Não se pode, porém, identificar a classe com o conceito. Já o antigo exemplo de Platão a respeito dos conceitos “ser um bípede sem penas” e “ser um animal racional” serve para ilustrar a situação. Como matéria de facto, todo o bípede sem penas é um animal racional e vice-versa. Dito de outro modo, estes dois conceitos são co-extensivos. Ora, não se pode considerar que se trata do mesmo conceito. Os conceitos não se regem pelo princípio da extensionalidade (ao contrário das classes). A ideia de Russell para o tratamento de classes é a de que falar de classes é o mesmo do que falar de conceitos em que, porém, se abandonam as distinções entre conceitos co-extensivos. A forma de “abandonar” estas distinções é feita através de paráfrases do discurso sobre classes em termos dum discurso sobre conceitos (a ideia destas paráfrases tem paralelos com teoria das descrições definidas de Russell 1905). No que se segue, vamos cingir-nos apenas a conceitos predicativos, visto que temos o axioma da redutibilidade. Começamos por dar significado à expressão ‘ $x \in \phi$ ’: significa $\phi(x)$. Dada uma fórmula ‘ $\theta(x)$ ’, damos significado à

notação ‘ $\{x: \theta(x)\}$ ’ no contexto duma predicação do seguinte modo: $G(\{x: \theta(x)\})$ é definida como sendo $\exists\phi(\forall x(\phi(x) \leftrightarrow \theta(x)) \wedge G(\phi))$. Esta fórmula diz que a classe determinada por θ tem a propriedade G se existir um conceito co-extensivo com a função proposicional θ que goza dessa propriedade. Note-se que a paráfrase está concebida de tal modo que se θ e ρ são co-extensivos, então tem-se $G(\{x: \theta(x)\})$ se, e somente se, $G(\{x: \rho(x)\})$. As quantificações universais sobre classes $\forall XG(X)$ parafraseiam-se por $\forall\phi G(\{x: \phi(x)\})$. *Mutatis mutandis* para as quantificações existenciais. Com estas paráfrases podemos remover sistematicamente a menção de classes do discurso assertórico. Usando este “dicionário” não é difícil de argumentar que se tem uma forma adequada do princípio da extensionalidade.

6 O neologicismo

No início da Secção 2 dissemos que o desenvolvimento fregiano da aritmética se divide em duas partes. Na primeira fase define-se o operador de cardinalidade à custa do operador primitivo de extensão. Na segunda fase, baseando-se no operador de cardinalidade, Frege procede ao desenvolvimento da aritmética. Ora, veio-se a descobrir que para efetuar este desenvolvimento não é necessário apelar novamente ao primitivo operador de extensão. Basta partir do operador de cardinalidade e do concomitante princípio de Hume para o fazer (este resultado é hoje conhecido por *teorema de Frege*: cf. Heck 1999). Esta descoberta levou a que, nos anos oitenta do século passado, Crispin Wright propusesse uma forma de logicismo baseada na lógica de segunda-ordem, sem o operador de extensão, mas tendo como *primitivo* o operador de cardinalidade e como axioma o princípio de Hume (Wright 1983). Este sistema é consistente, como se veio depois a mostrar (cf. Boolos 1987). Wright argumenta que o princípio de Hume é analítico da noção de número, na medida em que diz que dois conceitos têm o mesmo número de elementos se, e somente se, são equinumerícos. Esta visão coaduna-se com o logicismo tradicional pois tanto o logicismo fregiano como o russelliano definem os números à custa da noção de equinumericidade. Não obstante, a proposta de Wright é uma forma enfraquecida de logicismo na medida em que “número de *F*s” não se pode tomar como uma no-

ção lógica primitiva em nenhum sentido usual do termo. Este ponto é importante. Mesmo que o princípio de Hume se possa considerar epistemologicamente inocente para um logicista (no sentido acima em que se pode argumentar que exprime uma verdade analítica) não se pode ignorar que ele pressupõe um compromisso ontológico com números (platonismo aritmético). Com efeito, o bicondicional do princípio de Hume não é inocente do ponto de vista ontológico já que o seu lado esquerdo é uma igualdade entre termos, termos esses que se referem a números, enquanto que o lado direito é inocente a este respeito. É claro que o logicismo de Frege também aceita números como objetos. Mas, em Frege, esses objetos são definidos como sendo certas extensões. Efetivamente, Frege também é um platónico mas um platónico a respeito de extensões, tomadas como objetos lógicos. O neologicismo é diferente pois subscreve um platonismo aritmético.

A Lei Básica V de Frege e o princípio de Hume têm a mesma forma. São da forma

$$\forall F \forall G [\forall x.F(x) = \forall x.G(x) \leftrightarrow \mathbf{R}(F,G)],$$

onde \mathbf{R} é uma relação de equivalência entre conceitos. Estes princípios são denominados de *princípios de abstração*. Dada uma relação de equivalência entre conceitos, eles associam à classe de equivalência determinada pelo conceito F um objeto $\forall x.F(x)$. A ideia é a de que este objeto resulta de se abstrair aquilo que existe em comum a todos os conceitos da dada classe de equivalência. No caso do princípio de Hume, é o número de elementos que cai sob F (aquilo que existe em comum a todos os conceitos equinumericos a F). No caso da Lei Básica V, é a extensão de F (aquilo que há em comum a todos os conceitos co-extensivos a F). A ideia é muito apelativa. Porém, como mostra o paradoxo de Russell, a ideia falha em geral. No caso particular do princípio de Hume é bem sucedida – pelo menos na medida em que não dá origem a contradições. A exigência de consistência é inescapável mas deve-se perguntar se existe uma razão filosoficamente esclarecedora para aceitar determinados princípios de abstração e não outros. Este é o problema da *má companhia*. Mesmo a mera baliza da consistência, necessária que é – se bem que pouco esclarecedora – não constitui solução para o problema da má companhia. Com efeito, em Boolos 1990 apresentam-se exemplos

de princípios de abstração, consistentes isoladamente, mas inconsistentes em conjunto. Por exemplo, tome-se o *princípio do estorvo* (“nuisance principle”) que a cada conceito F faz corresponder um objeto $\mathbb{Q}x.F(x)$ de tal sorte que se tem $\mathbb{Q}x.F(x) = \mathbb{Q}x.G(x)$ se, e somente se, F e G são co-extensivos com a possível exceção dum número finito de casos. Esta abstração apenas é possível em domínios que sejam não vazios e finitos (caso em que gera apenas um objeto abstrato). Para os detalhes consulte-se Burgess (2005: 167). Visto que a abstração decorrente do princípio de Hume só tem modelos infinitos, conclui-se que estes dois princípios são mutuamente incompatíveis.

O problema da má companhia é um problema central para o neologicismo e, em especial, para a extensão do neologicismo que dá pelo nome de *abstracionismo* e que pretende fundamentar a matemática (e não só a aritmética) através de princípios de abstração. Não vamos discutir esta temática em detalhe mas apenas adiantar que o abstracionismo é um projeto em curso que se tem deparado com vários problemas. Para além da má companhia, outro dos problemas discutidos está relacionado com o facto do princípio de Hume não ser simplesmente um mero princípio de abstração que permite desenvolver formalmente a aritmética. É, para além disso, um princípio que obedece ao requisito segundo a qual uma fundamentação filosoficamente aceitável para uma teoria matemática deve encerrar em si mesma a explicação da sua possibilidade de aplicação. É o caso com a noção de número explicada em termos de equinumericidade. O projeto de desenvolver outras partes da matemática (p. ex., a análise real) através do abstracionismo tem-se debatido com esta questão e também com o problema relacionado de evitar o uso de vocabulário não lógico nos princípios de abstração. No caso da aritmética, as abstrações são abstrações de conceitos (um número é o número de elementos que cai sob um dado conceito) enquanto no caso dos números reais as abstrações são abstrações de razões de certas *magnitudes* (de tempo, massa, intensidade da luz, etc). Será que a noção de magnitude se pode caracterizar, em última análise, em termos lógicos? Em Hale e Wright (2005: 191), os dois principais proponentes do abstracionismo defendem que o projeto abstracionista não perderia interesse mesmo que se tivesse de basear num vocabulário não lógico. Contudo, eles próprios admitem que isso teria possivelmente um impacto significativo nas vantagens epistemológicas do projeto pois

este já não se alicerçaria somente na lógica.

Até agora, na nossa discussão do abstracionismo, evitámos trabalhar com extensões. Porém, também há estudos em que se procura emendar a Lei Básica V de Frege de modo a obter extensões. Estas emendas tomam tipicamente a forma

$$\forall F \forall G [\{x: F(x)\} = \{x: G(x)\} \leftrightarrow (\text{Pequeno}(F) \vee \text{Pequeno}(G) \rightarrow \forall x (F(x) \leftrightarrow G(x)))],$$

onde ‘**Pequeno**(F)’ é uma condição que limita o tamanho do número de elementos que caem sob o conceito F . Esta condição tem em vista evitar o paradoxo de Russell pois, sem condição limitativa, cai-se na inconsistente Lei Básica V. O lado direito do bicondicional acima define uma relação de equivalência (está a supor-se que um conceito co-extensivo a um conceito **Pequeno** ainda é **Pequeno**) e, por isso, continuamos dentro duma posição abstracionista. Os conceitos que não são pequenos ficam todos na mesma classe de equivalência a qual dá, artificialmente, origem a um objeto. As extensões propriamente ditas originam-se a partir dos conceitos pequenos. Em Boolos 1986, propõe-se tomar um conceito como pequeno se não for equinúmero a todo o universo de objetos (a equinumericidade é formulada, como habitualmente, através da lógica de segunda-ordem).

Há dois problemas com a estratégia da limitação do tamanho. Em primeiro lugar, não permite o desenvolvimento da aritmética por linhas fregianas pois, neste desenvolvimento, a noção de número é dada por classes de equinumericidade e estas classes são demasiado grandes (para um elaboração desta crítica veja-se Potter (2010: §5)). Em segundo lugar, a proposta de Boolos não dá origem a uma teoria dos conjuntos suficientemente forte. A razão é simples: o novo princípio de abstração diz que um conceito tem extensão desde que não seja equinúmero ao universo, mas nada diz sobre o tamanho do universo. Este pode, por exemplo, ser numerável e, por conseguinte, à luz da proposta de Boolos, apenas existiriam conjuntos finitos (de facto, a demonstração de consistência do novo princípio mostra isso mesmo, pois é feita relativamente à aritmética de segunda-ordem e, nesta interpretação, os conceitos com extensões são precisamente aqueles sob os quais caem apenas um número finito de objetos). O cerne do problema é que só existe uma boa teoria dos conjun-

tos desde que o universo seja suficientemente grande. Para se ter o axioma do infinito, é necessário manter que uma extensão infinita não é demasiado grande; para ir para além do infinito numerável, é necessário manter que uma extensão infinita não numerável não é demasiado grande, etc, etc. Não é claro que estas sucessivas defesas da existência de extensões cada vez maiores, ou condições que as impliquem (por exemplo, o axioma das partes), possam vestir uma roupagem abstracionista convincente.

7 A via predicativa

O diagnóstico tradicional para o paradoxo de Russell atribui a origem da contradição ao operador de extensão e à Lei Básica V de Frege. Num outro diagnóstico, Dummett (1991: cap. 17) defende que o paradoxo advém não do operador de extensão mas do carácter impredicativo da lógica de segunda-ordem usada por Frege. Uns anos mais tarde, Heck 1996 mostra que o operador de extensão é compatível com a lógica predicativa de segunda-ordem. Este resultado diz, pelo menos, que a proposta de Dummett é um caso a ter em conta. Note-se que a restrição dos conceitos que têm extensão baseia-se não numa limitação do tamanho da extensão (cf. secção anterior) mas na exigência duma certa simplicidade do conceito definidor (neste caso, a exigência predicativa), admitindo-se portanto a classe universal. Trata-se duma teoria zigzag, na terminologia russelliana (Russell (1906: 145)).⁷

Já discutimos a impredicatividade na Secção 5 mas penso ser útil retomar este assunto e explicar com algum cuidado o que é a lógica de segunda-ordem predicativa no contexto fregiano. Ela difere da lógica descrita na Secção 1 ao restringir a regra da eliminação do quantificador universal de segunda-ordem a fórmulas ‘ $\theta(x)$ ’ nas quais não ocorram quantificações de segunda-ordem. Consequentemente, o princípio da compreensão para conceitos, ou seja $\exists F \forall x (F(x) \leftrightarrow \theta(x))$, sofre uma restrição análoga: nas fórmulas ‘ $\theta(x)$ ’ não podem ocorrer quantificações de segunda-ordem (se se adotar o ponto de vista de que se está a definir o conceito F através da fórmula ‘ $\theta(x)$ ’, estamos a dizer que essa definição não pode ter

⁷ Em Urquhart 1988 explica-se esta insólita terminologia.

uma quantificação em cujo domínio de variação o próprio F faça parte). A restrição predicativa bloqueia o paradoxo de Russell por uma razão muito simples: o princípio da concreção (ver Secção 3), usado na derivação do paradoxo, não se demonstra. Como vimos, na demonstração deste princípio usa-se compreensão irrestrita e, de facto, na derivação do paradoxo de Russell esta compreensão é necessária pois aplica-se à expressão ' $x \notin x$ ', a qual abrevia a fórmula de segunda-ordem ' $\neg \exists F(x = \{z: F(z)\} \wedge F(x))$ '.

O sistema de Dummett/Heck é, porém, demasiado fraco para desenvolver a aritmética (Cruz-Filipe e Ferreira, no prelo). Note-se, contudo, que este sistema extravasa em muito a mera indicação sugerida por Frege de se distinguir os conceitos que têm extensão daqueles que não a têm. Não se trata somente da forma particular que esta distinção toma (aceitando apenas extensões para conceitos predicativos) como também do facto de se adoptar a lógica predicativa. Ao fazê-lo, automaticamente restringem-se os conceitos que têm extensões: visto que só se permitem conceitos predicativos na linguagem, apenas existem extensões para estes conceitos. Porém, a mera restrição das extensões a conceitos predicativos não impõe que a lógica seja predicativa. Porque não aceitar a lógica de segunda-ordem impredicativa mas restringir o operador de extensão apenas a conceitos predicativos? Tecnicamente isso pode ser obtido do seguinte modo: admita-se dois géneros de variáveis de segunda-ordem (umas para os conceitos impredicativos, outras para os predicativos) e restrinja-se o operador de extensão apenas às fórmulas do fragmento predicativo da linguagem. Obtém-se um sistema consistente em que se pode desenvolver a aritmética por meios fregianos. Caracteristicamente, o conceito de número natural é definido de modo impredicativo e, portanto, não tem extensão. Sem embargo, esta situação não impede o desenvolvimento da aritmética pois pode *demonstrar-se* a seguinte forma de redutibilidade: todo o conceito verdadeiro de apenas um número finito de objetos é co-extensivo a um conceito predicativo (Ferreira, em preparação). Não parece que se possa ir mais longe.

8 Considerações finais

A passagem irrestrita de conceito para extensão, proposta por Frege através da sua Lei Básica V, endossa uma visão da relação entre objeto e conceito em que estes últimos têm *sempre* um sucedâneo nos primeiros: as suas extensões. Esta visão das classes ou conjuntos foi refutada. Face ao paradoxo, Frege desistiu do projeto logicista mas Russell e Whitehead retomaram-no, deixando de considerar as classes como objetos e, na peugada, abandonando também a visão de que todas as classes co-existem no mesmo domínio de significância. As classes dividem-se agora por vários tipos. A tentativa de executar este novo projeto tornou patente as suas grandes limitações e, pode dizer-se, levou ao seu abandono. No entanto, o exercício teve pelo menos uma consequência pasmosa. Mostrou que existem sistemas formais englobadores sob os quais se pode desenvolver todo o trabalho do “matemático usual” (*ordinary mathematician*).⁸

O neologicismo e o abstracionismo surgiram nos anos oitenta do século passado e têm atualmente uma série de aderentes e estudiosos. Discutimos em traços gerais estes projetos e os seus problemas mas não gostaria de terminar sem apontar um fenómeno curioso dos estudos neo-fregianos. Vários sistemas têm sido propostos e o requisito mínimo para serem tomados a sério é o de que sejam consistentes. Ora, como é que nos convencemos de que os sistemas são consistentes? O segundo teorema da incompletude de Gödel mostra que não se pode ambicionar a ter um argumento formal de consistência que não seja relativo a um sistema suficientemente forte. Não se pode ir por aí! Vai-se, então, por onde? De algum modo a proposta abstracionista deve convencer-nos da sua coerência (por isso é que o problema da má companhia é tão central). Mas que tipo de argumento é que nos pode convencer disso, mesmo que a evidência possa ser revogável? Na prática, os neo-logicistas e abstracionistas demonstram que os seus sistemas são consistentes *relativamente* à teoria dos conjuntos (ou a sistemas mais fracos, como a aritmética de segunda-

⁸ A formulação artificiosa desta frase deve-se ao facto de não se poder dizer *tout court* que existem sistemas formais que permitem desenvolver *toda* a matemática. Por exemplo, a consideração de extensões dos sistemas formais englobadores (que, pelos teoremas da incompletude de Gödel, são necessariamente incompletos) também faz parte da matemática e, é claro, extravasa os ditos sistemas.

-ordem). A teoria dos conjuntos **ZF** (de Zermelo-Fraenkel) e suas extensões constituem, no momento atual, o tribunal último para arbitrar asserções de consistência. Nada há de errado, enquanto mero exercício técnico, em apelar para este tribunal. No entanto, não deixa de ser curioso (e, quiçá, vexatório) que a proposta fundamentadora abstracionista se apoie em propostas rivais para estabelecer os seus créditos. O que é que a teoria dos conjuntos **ZF** ou a aritmética de segunda-ordem têm que o abstracionismo não tem? Certamente que têm a seu favor o facto de constituírem o cânone fundamentador atual. Contudo, esta observação não pode ser determinante porque uma nova proposta fundamentadora deve ela própria ambicionar a se tornar o cânone. A minha resposta é a de que a fundamentação canónica possui uma conceção muito clara do universo da matemática. No caso da teoria dos conjuntos **ZF**, é a conceção iterativa dos conjuntos (Gödel 1947). Os sistemas abstracionistas não têm nada que se lhe assemelhe. Talvez a abstrusidade do denominado *problema do Júlio César* seja um sintoma agudo desta insuficiência. Os princípios de abstração pretendem dar conta dos objetos matemáticos através das suas condições de igualdade. Duas abstrações $\S x.F(x)$ e $\S x.G(x)$ são o mesmo objeto se F e G estiverem relacionados por \mathbf{R} . No entanto, o princípio de abstração é silencioso a respeito das igualdades entre uma abstração e um termo que não nos seja dado dessa forma: nada nos diz a respeito das igualdades da forma ' $\S x.F(x) = y$ '. Em *Die Grundlagen der Arithmetik*, Frege chega mesmo a perguntar se Júlio César pode ser um número (Frege (1992: §56); veja-se também §66). Por um lado é natural pensar que as abstrações introduzem novos objetos no universo do discurso e, se assim é, a resposta à pergunta de Frege é claramente negativa e cabalmente justificada. Por outro lado, o poder matemático dos princípios de abstração reside precisamente no facto dos quantificadores do lado direito do bicondicional incluírem no seu domínio de variação os objetos dados pelas abstrações. Se isso não fosse permitido, seriam inúteis para fundamentar a matemática. Por conseguinte, não se pode defender que os objetos que são os valores dos operadores de abstração sejam realmente novos. Não o sendo, o princípio de abstração não nos diz quais são os objetos do domínio dado que são números. Este estado de coisas reflete-se na sub-determinação dos valores que os objetos obtidos por abstração podem tomar (ou, no caso contraditório, na

impossibilidade desta tomada de valores), tornando obscuro e artificial o universo abstracionista e dificultando uma convicção clara e autônoma da consistência das teorias propostas.⁹

Fernando Ferreira
Universidade de Lisboa

Referências

- Boolos, G. 1986. Saving Frege from Contradiction. *Proceedings of the Aristotelian Society*, new series, 87:137-151.
- Boolos, G. 1987. The Consistency of Frege's Foundations of Arithmetic. In *On Being and Saying: Essays in Honor of Richard Cartwright*. Organizado por Judith Jarvis Thomson. Cambridge, MA: MIT Press.
- Boolos, G. 1990. The Standard of Equality of Numbers. In *Meaning and Method: Essays in Honor of Hilary Putnam*. Organizado por George Boolos. Cambridge: Cambridge University Press.
- Burgess, J. 2005. *Fixing Frege*. Princeton: Princeton University Press.
- Cruz-Filipe, L. e Ferreira, F. The Finitistic Consistency of Heck's Predicative Fregean System. No prelo em *Notre Dame Journal of Formal Logic*.
- Dummett, M. 1991. *Frege: Philosophy of Mathematics*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Ferreira, F. Zigzag and Fregean Arithmetic. Artigo em preparação.
- Frege, G. 1992. *Os Fundamentos da Aritmética*. Tradução de *Die Grundlagen der Arithmetik* por António Zilhão. Lisboa: Imprensa Nacional - Casa da Moeda.
- Frege, G. 2013. *Basic Laws of Arithmetic*. Tradução dos dois volumes de *Grundgesetze der Arithmetik* por Philip A. Ebert e Marcus Rossberg. Oxford: Oxford University Press.
- Gödel, K. 1944. Russell's Mathematical Logic. In *The Philosophy of Bertrand Russell* (Library of Living Philosophers). Traduzido para português por Manuel Lourenço em *O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian 2009.
- Gödel, K. 1947. What is Cantor's Continuum Problem? *American Mathematical Monthly* 54: 515-525. Traduzido para português por Manuel Lourenço em *O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian 2009.
- Hale, B. and Wright, C. 2005. Logicism in the Twenty-first Century. In *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. Organizado por Stewart Shapiro. Oxford: Oxford University Press.
- Heck, R. 1996. The Consistency of Predicative Fragments of Frege's Grundgesetze der Arithmetik. *Journal of Philosophical Logic* 31:209-220.
- Heck, R. 1999. Frege's Theorem: An Introduction. *The Harvard Review of Philosophy* 7:56-73. Traduzido para português por André Abath e António Zilhão em *Do Círculo de Viena à Filosofia Analítica Contemporânea*. Lisboa e Viana do Castelo: Sociedade Portuguesa de Filosofia e Livros de Areia 2007.
- Potter, M. 2010. Abstractionist Class Theory: Is There Any Such Thing? In *The Force of Argument: Essays in Honor of Timothy Smiley*. Organizado por Jonathan

⁹ Agradeço a Nelson Gomes e a Augusto Franco de Oliveira a leitura e os comentários a uma versão anterior deste escrito.

- Lear e Alex Oliver. New York e Oxford: Routledge.
- Russell, B. 1905. On Denoting. *Mind* 14:479-493.
- Russell, B. 1906. On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types. Reimpresso em *Essays in Analysis*. Organizado por Douglas Lackey. London: George Allen and Unwin Ltd. 1973.
- Russell, B. 2007. *Introdução à Filosofia Matemática*. Tradução de *Introduction to Mathematical Philosophy* por Adriana Silva Graça. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian. Publicado pela primeira vez em inglês em 1919.
- Russell, B. e Whitehead, A. N. 1997. *Principia Mathematica* to *56. Cambridge University Press.
- Urquhart, A. 1988. Russell's Zigzag Path to the Ramified Theory of Types. *Russell: The Journal of Bertrand Russell Studies* 8:83-91.
- Wright, C. 1983. *Frege's Conception of Numbers as Objects*. Aberdeen: Aberdeen University Press.